第 1 問

[解] $\begin{cases} a \geq 0 > b \\ a, b, t \in \mathbb{R} \end{cases}$ …①

(1) $X = \frac{1}{2}t + \frac{5}{t^2+1}$, $Y = \frac{1}{2}t - \frac{5}{t^2+1}$ とおくと、$X+Y=t$, $X-Y=\frac{10}{t^2+1}$ となる。漸化式の辺々足し引きして、

$$\begin{cases} a_{n+1}+b_{n+1} = (X+Y)(a_n+b_n) = t(a_n+b_n) \\ a_{n+1}-b_{n+1} = (X-Y)(a_n+b_n) = \frac{10}{t^2+1}(a_n-b_n) \end{cases}$$

これと初期条件 $a_1=a$, $b_1=b$ から、等比数列の公式から、

$$\begin{cases} a_n+b_n = t^{n-1}(a+b) \\ a_n-b_n = \left(\frac{10}{t^2+1}\right)^{n-1}(a-b) \end{cases}$$

辺々足して、

$$a_n = \frac{1}{2}(a+b)t^{n-1} + \frac{1}{2}(a-b)\left(\frac{10}{t^2+1}\right)^{n-1}$$ //

(2) $A = \frac{a+b}{2}$, $B = \frac{a-b}{2}$ とする。さらに、$S = \frac{10}{t^2+1}$ とすると(1)から、

$$a_n = A \cdot t^{n-1} + B \cdot S^{n-1}$$

となる。以下 a_n が収束する条件をかんがえる。①から、$B>0$ であることに注意する。まず $A \neq 0$ のとき、

1° $|t| < S \Leftrightarrow -2 < t < 2$ の時

$a_n = S^{n-1}\left\{B + A\left(\frac{t}{S}\right)^{n-1}\right\}$ において $\left\{B + A\left(\frac{t}{S}\right)^{n-1}\right\} \xrightarrow{n \to +\infty} B\ (\neq 0)$ だから、a_n の収束条件は

$$-1 < S \leq 1 \Leftrightarrow t \leq -3,\ 3 \leq t$$

だから、$-2<t<2$ とあわせて、このような t はない。

2° $|t| = S \Leftrightarrow t = \pm 2$ の時

$$\begin{cases} t=2 \text{ の時、} a_n = a \cdot 2^{n-1} \text{ だから、①より、収束条件は } a=0 \\ t=-2 \text{ の時 } a_n = A(-2)^{n-1} + B \cdot 2^{n-1} \text{ だから、①より、} a_n \text{ は収束しない。} \end{cases}$$

3° $|t| > S \Leftrightarrow t < -2$ or $2 < t$ の時

$a_n = t^{n-1}\left\{A + B\left(\frac{S}{t}\right)^{n-1}\right\}$ である。$\left\{A + B\left(\frac{S}{t}\right)^{n-1}\right\} \xrightarrow{n \to \infty} A\ (\neq 0)$ より収束条件は $-1 < t \leq 1$ だが、"$t<-2$ or $2<t$" に反し矛盾。

次に $A=0 \Leftrightarrow a+b=0$ の時、条件は、$a_n = B \cdot S^{n-1}$ より、$-1 < B \leq 1 \Leftrightarrow t \leq -3,\ 3 \leq t$

以上から、もとめる条件は、

「$a+b=0 \land (t \leq -3$ or $3 \leq t)$」又は「$a+b \neq 0 \land a=0 \land t \neq 2$」 //

である。

$t < S \Leftrightarrow 0 < t < 2$ $(0<t)$

$-t < S \Leftrightarrow -2 < t < 0$

$-t < \frac{10}{t^2+1}$

$-t^3 - t < 10$

$t^3 + t + 10 > 0$ $(t<0)$

$(t+2)(t^2-2t+5) > 0$ $(t<0)$

$t+2>0$

$t>-2$

$a_n = A(-3)^{n-1} + B$

$-1 < \frac{10}{t^2+1} \leq 1$

$-t^2-1 < 10 \leq t^2+1$

$9 \leq t^2 \leq$

$-1 < t^2$

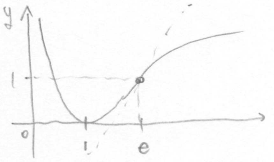
第 2 問

[解] $C: y=(\log x)^2 \equiv f(x) \quad (x>0)$

(1) $f'(x)=2\dfrac{\log x}{x} \quad f''(x)=2\dfrac{1-\log x}{x^2}$ から下表をうる

x	0		1		e	
f'		$-$	0	$+$	$+$	$+$
f''		$+$	$+$	$+$	0	$-$
f		↘	0	↗	1	↗

これと，$f(x) \to +\infty \quad (x\to 0, +\infty)$ から，グラフは下図



(2) $P(\alpha, f(\alpha))$ での接線 $L(\alpha)$ は，

$$L(\alpha): y = l(x) = 2\frac{\log\alpha}{\alpha}(x-\alpha)+f(\alpha)$$

であるから，$L(\alpha)$ と C の共有点の個数は

$$l(x)=f(x)$$

$$(\log x)^2-(\log\alpha)^2-2\frac{\log\alpha}{\alpha}(x-\alpha)=0 \quad \cdots①$$

の $x>0$ の解の個数にひとしい。($\because x$ に対して $f(x)$ が1対1対応)

①の左辺 $g(x)$ とおく。$g(x)$ には平均値の定理が適用可能で，

$x \neq \alpha$ の時

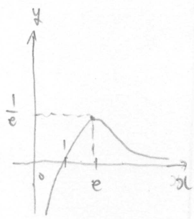
$$g(x)=(x-\alpha)g'(c)$$

をみたす c が x と α の間にある。ここで $g'(x)=2\left(\dfrac{\log x}{x}-\dfrac{\log\alpha}{\alpha}\right)$

であること及び，$f''(x)$ の表などから $y=\dfrac{\log x}{x}$ のグラフが下図である

ことから，$x\neq\alpha$ での $g(x)=0$ の解の数は

以下の通り



$\left(\begin{array}{l} x\to 0 \text{ で } y\to -\infty \\ x\to +\infty \text{ で } y\to 0 \end{array}\right)$

$$\begin{cases} 0<\alpha\leq 1 & \cdots 0\text{コ} \\ 1<\alpha \ (\alpha\neq e) & \cdots 1\text{コ} \\ \alpha=e & \cdots 0\text{コ} \end{cases}$$

α の値によらず，$x=\alpha$ は解だから

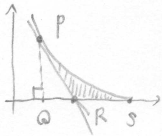
$$\begin{cases} 0<\alpha\leq 1,\ \alpha=e & \cdots 1\text{コ} \\ 1<\alpha \ (\alpha\neq e) & \cdots 2\text{コ} \end{cases}$$

//

(3) P から x 軸に下ろした垂足 Q，$L(\alpha)$ と x 軸の交点 R，$S(1,0)$ とおく.

$$\triangle PQR = \frac{1}{2}(\log\alpha)^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\alpha\log\alpha\right)$$

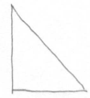
$$= -\frac{1}{4}\alpha(\log\alpha)^3 \quad \cdots①$$



$$= \int_\alpha^1 (\log x)^2 dx$$

$$= \Big[x(\log x)^2-2x\log x+2x\Big]_\alpha^1$$

$$= 2-\left(\alpha(\log\alpha)^2-2\alpha\log\alpha+2\alpha\right) \quad \cdots②$$



$$-\frac{(\log\alpha)^2}{2\frac{\log\alpha}{\alpha}} = \frac{-1}{2}\alpha\log\alpha$$

①，②から

$$S(\alpha) = \quad - \triangle PQR$$

$$= 2-\alpha(\log\alpha)^2+2\alpha\log\alpha-2\alpha+\frac{1}{4}\alpha(\log\alpha)^3$$

//