T. K. 大 後期数学 2008

第 1 問

(1) $a_1, a_2, x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ が

$$0 < a_1 \le a_2,\ a_1x_1 \le a_1y_1,\ a_1x_1 + a_2x_2 \le a_1y_1 + a_2y_2$$

をみたす。$x_1 + x_2 \le y_1 + y_2$ を示せ

(2) $n \in \mathbb{N}_{\ge 2}$ とし、a_k, x_k, y_k $(k=1,2,\cdots,n)$ が

$$0 < a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$$

$$\sum_{i=1}^{j} a_i x_i \le \sum_{i=1}^{j} a_i y_i \quad (j=1,2,\cdots,n)$$

をみたすならば、

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \le \sum_{i=1}^{n} y_i$$

を示せ

▷ $\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 \le a_1y_1 + a_2y_2 \\ x_1 \le y_1,\ 0 < a_1 \le a_2 \end{cases} \longrightarrow x_1 + x_2 \le y_1 + y_2$

→セ代して.

$$a_1(y_1 - x_1) \ge a_2(x_2 - y_2)$$

$y_1 \ge x_1$ から

$$a_2(y_1 - x_1) \ge a_2(x_2 - y_2)$$

⇒OK

▷ <u>$n=1$の時</u>

$a_1x_1 \le a_1y_1 \longrightarrow x_1 \le y_1$

<u>$n=2$の時</u>

$a_2(x_2 - y_2) \le a_1(y_1 - x_1) \le a_2(y_1 - x_1) \longrightarrow x_1 + x_2 \le y_1 + y_2$

<u>$n=3$の時</u>

$$\underbrace{a_2(x_2 - y_2)}_{x_1'} + a_3x_3 \le a_1(y_1 - x_1) + a_3y_3 \le a_2\underbrace{(y_1 - x_1)}_{y_1'} + a_3y_3$$

ところで $x_1' \le y_1'$ だから、$n=2$に帰着!

→まず$n=1$から $a_2(x_2 - y_2) + \bigcirc \le a_2(y_1 - x_1) + \triangle$ をつくって、1つ下に帰着すれば良い。

a_1

$a_1y_1 + a_2y_2$

$a_1x_1 + a_2y_2 \le$

$a_1(x_1 - y_1) \le a_2(y_2 - x_2)$

$a(x_1 - y_1) \le a_2$

$a_2(x_2 - y_2) \ge a_1(y_1 - x_1)$

$a_2 \quad > a_1$

$x_2 \ge y_2$ のとき

$x_1 \le y_1$

$a_1 \le a_2$

$a_2^2(x_2 - y_2) +$

$> a_2a_2(x_2 - x_1$

$a_k + a_{k+1}\left(\frac{a_k}{\triangle}x_k + \frac{a_{k+1}}{\triangle}y_{k+1}\right)$

$\frac{a_k}{\triangle}x_k + \frac{}{\triangle}$

[解] (2)のnを, $n=1$にまで拡張して考える。

$n=1$の時, $0<a_1$, $a_1x_1 \leq a_1y_1$ から, 両辺$a_1>0$でわって

$$x_1 \leq y_1 \quad \cdots ①$$

$n \geq 2$に対して常に①が成立する。(2)の命題を◇として, ◇をnに関する帰納法で示す。ここで,

$$A_j : \sum_{i=1}^{j} a_i x_i \leq \sum_{i=1}^{j} a_i y_i \quad (j=1,2,\cdots,n)$$

とおく。

1° $n=2$の時

A_2から,

$$a_2(x_2-y_2) \leq a_1(y_1-x_1) \leq a_2(y_1-x_1) \quad (\because a_1 \leq a_2, ①)$$

だから両辺$a_2>0$でわって,

$$x_2-y_2 \leq y_1-x_1 \iff x_1+x_2 \leq y_1+y_2$$

より, $n=2$では◇は成立 // (1)

2° $n \leq k$ $(k \in \mathbb{N}_{\geq 2})$での成立を仮定

A_j $(j=3,4,\cdots,k+1)$について, 1°と同じく, ①から

$$a_2(x_2-y_2)+\sum_{i=3}^{j} a_i x_i \leq a_1(y_1-x_1)+\sum_{i=3}^{j} a_i y_i \leq a_2(y_1-x_1)+\sum_{i=3}^{j+1} a_i y_i \quad \cdots ②$$

が成り立つ。ここで, 数列$\{a'_i\}$, $\{X_i\}$, $\{Y_i\}$を,

$$\begin{cases} a'_i = a_{i+1} & (i=1,2,\cdots,k) \\ X_1 = x_2-y_2, \quad X_i = x_{i+1} & (i=2,3,\cdots,k) \\ Y_1 = y_1-x_1, \quad Y_i = y_{i+1} & (i=2,\cdots,k) \end{cases} \quad \cdots ③$$

と定めると, $\{a'_i\}$, $\{X_i\}$, $\{Y_i\}$は,

$$\begin{cases} 0 < a'_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k \\ \sum_{i=1}^{j} a'_i X_i \leq \sum_{i=1}^{j} a'_i Y_i \quad (j=1,2,\cdots,k) \end{cases}$$

をみたす(②及び1°)から, これに帰納法の仮定を用いて,

$$\sum_{i=1}^{k} X_i \leq \sum_{i=1}^{k} Y_i$$

③から

$$\sum_{i=2}^{k+1} x_i - y_2 \leq \sum_{i=3}^{k+1} y_i + y_1 - x_1$$

$$\iff \sum_{i=1}^{k+1} x_i \leq \sum_{i=1}^{k+1} y_i$$

より, $n=k+1$でも◇は成立。

以上1°, 2°から, 任意の$n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$に対し◇は成立する。よって題意は示された 図

T. K. 前後 08 回

第 2 問

[解] $a_k=\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} x^2|\sin n\pi x|\,dx$ とおく。$f(x)=x^2$ とおき、$\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ で $f(x)$ の最大・小値を与える x を、各 M_k, m_k とすると、$|\sin n\pi x|\geqq 0$ から、

$$f(m_k)|\sin n\pi x| \leqq f(x)|\sin n\pi x| \leqq f(M_k)|\sin n\pi x|$$

積分して

$$f(m_k)\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}|\sin n\pi x|\,dx \leqq a_k \leqq f(M_k)\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}|\sin n\pi x|\,dx \quad \cdots①$$

ここで $\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}|\sin n\pi x|\,dx=\frac{2}{n\pi}$ だから、①に代入して

$$\frac{2}{\pi}\frac{1}{n}f(m_k) \leqq a_k \leqq \frac{2}{\pi}\frac{1}{n}f(M_k)$$

k について和をとって

$$\frac{2}{\pi}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(m_k) \leqq I_n \leqq \frac{2}{\pi}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(M_k) \quad \cdots②$$

区分求積から、$n\to\infty$ の時

$$\begin{cases} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(m_k) \longrightarrow \int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{3} \\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(M_k) \longrightarrow \int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{3} \end{cases}$$

だから、②及び区分求積から

$$I_n \longrightarrow \frac{2}{3\pi}$$
//