2007

第1問

[解] $f(x) = x^3 - n_1 x + (-1)^{n_2} n_3$ とおく.

(1) $f'(x) = 3x^2 - n_1$ から. 下表をうる

x		$-\sqrt{n_1/3}$		$\sqrt{n_1/3}$	
f'	+	0	−	0	+
f	↗		↘		↗

したがって. $f(x)=0$ が3異実解を持つ時

$$f(\sqrt{n_1/3})\, f(-\sqrt{n_1/3}) < 0$$

$$\left(\frac{n_1}{3}\sqrt{\frac{n_1}{3}} - n_1\sqrt{\frac{n_1}{3}} + (-1)^{n_2} n_3\right)\left(\frac{2}{3}n_1\sqrt{\frac{n_1}{3}} + (-1)^{n_2} n_3\right) < 0$$

$$-\frac{2}{3}n_1\sqrt{\frac{n_1}{3}} < (-1)^{n_2} n_3 < \frac{2}{3}n_1\sqrt{\frac{n_1}{3}} \quad \cdots ①$$

$A = \frac{2}{3}n_1\sqrt{\frac{n_1}{3}}$, $B = (-1)^{n_2} n_3$ とおく。下表をうる.

n_1	1	2	3	4	5	6
A	$\frac{2}{9}\sqrt{3}$	$\frac{4}{9}\sqrt{6}$	2	$\frac{16}{9}\sqrt{3}$	$\frac{10}{9}\sqrt{15}$	$4\sqrt{2}$

$\frac{2}{9}\sqrt{3} < 1 < \frac{4}{9}\sqrt{6} < 2 < 3 < \frac{16}{9}\sqrt{3} < 4 < \frac{10}{9}\sqrt{15} < 5 < 4\sqrt{2} < 6$ である

から. n_1 に対して①をみたす n_3 は以下 (n_2 は任意)

n_1	1	2	3	4	5	6
n_3	ナシ	1	1	1〜3	1〜4	1〜5

したがってもとめるカクリツは

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18} \;//$$

(2) 自然数解 k とおく

$$k(k^2 - n_1) = -(-1)^{n_2} n_3$$

から. k は n_3 の約数であることが必要。これより. k, n_3 で場合分け (e: even, o: odd)

n_3	1	2	3	4	5	6
$\begin{pmatrix} k \\ k^2-n_1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 \\ \pm 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ \pm 3 \end{pmatrix}$

n_3	1	2	3	4	5	6
(k, n_1)	(1,2)	(1,3) (2,3) (2,5)	(1,4)	(1,5) (2,2) (2,6)	(1,6)	(2,1)

各々に対し, n_2 は3通りずつ (even or odd) が1対1に対応するので.

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{36} = \frac{5}{36} \;//$$

$\frac{100\cdot 15}{81}$ $\frac{4}{27}$

$A^2 B^2$

$-B < A < B$

$4\sqrt{2} < 6$

$2\sqrt{2} > 3$

$\frac{2\cdot 6}{3\cdot 3}\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$

$5\sqrt{5}$

$\frac{10}{9}\sqrt{15}$

$4-\square = \pm 2$

$4 \mp 2 = \square$

$4-\square = -3$

$4-\square = \pm 1$

$4 \mp 1 = \square$

$1-\square = -2$

$\square = 3$

$4-\square = \pm 3$

$4 \mp 3 = \square$

$9-\square = 2$

第2問

[解] $0<x<\pi/2$ …① である。以下、$c=\cos x$, $s=\sin x$, $t=\tan x$ とする。①のもとで $s<x<t$ だから、

$$\begin{cases} f'(x)=\dfrac{t-\frac{1}{c^2}\cdot x}{t^2}=\dfrac{sc-x}{s^2}<0 \quad (\because ①\text{及び、同区間で } x>s,\ 0<c<1) \\ f''(x)=\left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{x}{s^2}\right)'=-\dfrac{1}{s^2}-\dfrac{s^2-x\cdot 2s\cdot c}{s^4}=\dfrac{2c(x-t)}{s^3}<0 \quad (\because ①\text{で } x<t) \end{cases} \cdots ②$$

又、$g(x)=f(x)+\dfrac{1}{f(x)}$ だから、$f(x)=f$ などと略記して、

$$\begin{cases} g'(x)=f'-\dfrac{f'}{f^2}=f'\left(1-\dfrac{1}{f^2}\right)>0 \quad (\because ②\text{及び、} 0<f<1 \text{ から } 1-\frac{1}{f^2}<0) \\ g''(x)=f''\left(1-\dfrac{1}{f^2}\right)+f'\left(2\dfrac{f'}{f^3}\right)>0 \quad (\because ②\text{及び、} 0<f<1) \end{cases} \cdots ③$$

以上②③から、

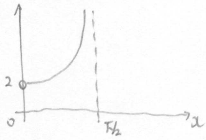
$f'(x)<0$, $f''(x)<0$, $g'(x)>0$, $g''(x)>0$ //

又、

$$\begin{cases} f(x)\xrightarrow{x\to 0}1,\ f(x)\xrightarrow{x\to\pi/2}0 \\ g(x)\xrightarrow{x\to 0}2,\ g(x)\xrightarrow{x\to\pi/2}+\infty \end{cases}$$

とあわせて、$y=f$, $y=g$ のグラフは以下のようになる。

$(y=f)$



$(y=g)$

//

(以上(1), (2))

(3) $h(x)=\log\dfrac{a}{f(x)}-g(x)$ とおく。$0<x<\pi/2$ で $h(x)=0$ が実解を持つ条件をもとめれば良い。以下 $A=\log a$ とする。ここで $h'(x)$ を計算すると、

$$h'(x)=-\frac{f'(x)}{f(x)}-g'(x)=-\frac{f'}{f}-f'\left(1-\frac{1}{f^2}\right) \quad (\because ③)$$

$$=\frac{-f'}{f^2}(1-f-f^2)$$

であり、(1)及び、$0<f<1$ から、$f(x)=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ なる x がただ1つあって、これを $x=\alpha$ とすると、下表をうる。

x	(0)		α		$(\pi/2)$
h'		$+$	0	$-$	
h	$(A-2)$	↗		↘	$(-\infty)$

$f(\alpha)=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $g(\alpha)=f(\alpha)+\dfrac{1}{f(\alpha)}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}+\dfrac{2}{-1+\sqrt{5}}=\sqrt{5}$ より、

$$h(\alpha)=A-\log f(\alpha)-g(\alpha)$$
$$=A-\log\frac{-1+\sqrt{5}}{2}-\sqrt{5}$$
$$=A-\log\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\cdot e^{\frac{5}{2}}$$

である。したがって、表とあわせて題意の条件は、

$$h(\alpha)\geq 0 \Leftrightarrow A\geq \log\frac{-1+\sqrt{5}}{2}e^{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow a\geq\frac{-1+\sqrt{5}}{2}e^{\frac{5}{2}}$$ //

($\because \log x$ は単調増加)

s^{-2}

$+2s^{-3}\cdot c$

$\dfrac{1}{f}$

f^2

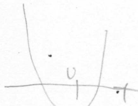
$$2\left(\frac{sc-x}{s^2}\right)^2+\frac{x}{t}\,\frac{2c(x-t)}{s^3}\left\{\frac{x^2}{t^2}-1\right\}$$

$$\frac{2}{f^3}\left[\frac{(sc-x)^2}{s^4}+\frac{c^2(x-t)\cdot x}{s\cdot s^3}\left(\frac{x^2}{t^2}-1\right)\right]$$

$$\frac{2}{f^3s^4}\left[(sc-x)^2+c^2x(x-t)\left(\frac{x^2}{t^2}-1\right)\right]$$

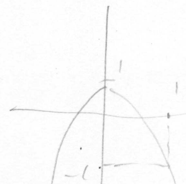
$(sc)^2-2xsc+c^2x\left(x-\frac{s}{c}\right)\left(\frac{c^2x^2}{s^2}-1\right)$

$+x^2$



$(sc)^2-2scx+x^2+cx(cx-s)\left(\frac{c^2}{s^2}x^2-1\right)$

$y=$



f^2+f-1

$(f+1/2)^2$

$x^2+x-1=$

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$