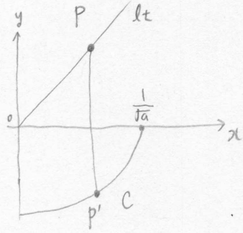
T. K. 2うき 0 6 回

第 1 問

[解] $a, b > 0$ …①

(1) $C: ax^2 + by^2 = 1 \quad (x \geq 0,\ y \leq 0)$

$l_t: y = tx \quad (t \geq 0,\ x \geq 0)$



$P(X, tX)$, $P'(X, Y)$ とおける。この時、

$$Y = \frac{-1}{\sqrt{b}}\sqrt{1 - aX^2}$$

であり、又 $0 \leq X \leq \frac{\sqrt{a}}{a}$ …② である。$\overline{PP'} = g(X)$ として、

$$g(X) = tX + |Y| = tX + \frac{\sqrt{b}}{b}\sqrt{1 - aX^2}$$

より、

$$g'(X) = t + \frac{\sqrt{b}}{b}\frac{-2aX}{2\sqrt{1 - aX^2}} = \frac{(bt)^2 - \{(bt)^2 a + a^2 b\}X^2}{b\sqrt{1 - aX^2}\{bt\sqrt{1 - aX^2} - a\sqrt{b}X\}}$$

だから、下表をうる。

X	0		α		$\sqrt{a}/a$
g'		$+$	0	$-$	
g					

$$\left(\alpha = \sqrt{\frac{(bt)^2}{(bt)^2 a + a^2 b}}\right)$$

よって $X = \alpha$ で $g(X)$ は最大だから、P_t の座標は

$$X = \alpha,\ Y = t\alpha$$

で与えられる。次に t をうごかす。$t = 0$ の時 $P_0(0, 0)$ であり、$t \neq 0$ の時 $X \neq 0$ から $t = \frac{Y}{X}$ だから、$X = \alpha$ に代入して

$$X = \sqrt{\frac{\left(b\frac{Y}{X}\right)^2}{\left(b\frac{Y}{X}\right)^2 a + a^2 b}} \iff X^2\left\{b^2\frac{Y^2}{X^2}a + a^2 b\right\} = b^2\frac{Y^2}{X^2} \quad (\because X \geq 0)$$

$$\iff Y^2(b - abX^2) = a^2X^4$$

$$\iff Y = \frac{aX^2}{\sqrt{b(1 - aX^2)}} \quad \left(\because X = \frac{\sqrt{a}}{a} \text{ は不適だから } 0 < X < \frac{\sqrt{a}}{a},\ Y \geq 0\right)$$

したがって、$t = 0$ とあわせて、

$$f(x) = \frac{ax^2}{\sqrt{b(1 - ax^2)}} \quad \left(0 \leq x < \frac{\sqrt{a}}{a}\right)$$
//

(2) y を消して $p = x^2$ とおくと、

$$ap + b\frac{(ap)^2}{b(1 - ap)} = 1$$

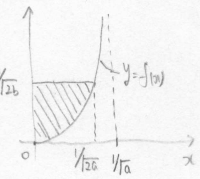
さらに $q = ap$ として整理して $q = \frac{1}{2}$ だから、$x \geq 0$ とあわせて、

$$x = \sqrt{\frac{1}{2a}},\quad y = \sqrt{\frac{1}{2b}}$$

だから

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2a}},\quad \beta = \sqrt{\frac{1}{2b}}$$
//

(3) $f(x)$ は区間内で単調増加だから、グラフの概形は右図



$x \sim x + \Delta x\ (\Delta x \ll 1)$ の部分を y 軸まわりに回した立体の体積は、幅 Δx、高さ $1/\sqrt{2b} - f(x)$、長さ $2\pi x$ の直方体で近似できるので、求める立体の体積 V として、

$$V = 2\pi\int_0^{\sqrt{\frac{1}{2a}}}\left(\sqrt{\frac{1}{2b}} - f(x)\right)\cdot x\,dx \quad \cdots ②$$

である。ここで、

$$\int_0^{\sqrt{\frac{1}{2a}}}\sqrt{\frac{1}{2b}}\cdot x\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2b}}\cdot\frac{1}{2a} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{1}{a}\sqrt{\frac{1}{b}} \quad ③$$

$$\int_0^{\sqrt{\frac{1}{2a}}} f(x)\cdot x\,dx = \int_1^{\frac{1}{2}}\frac{1 - t}{\sqrt{bt}}\frac{1}{-2a}dt \quad (t = 1 - ax^2)$$

$$= \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{1}{b}}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{1}{\sqrt{t}} - \sqrt{t}\right)dt = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{1}{b}}\left[2\sqrt{t} - \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$= \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{1}{b}}\left[2\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{1}{b}}\left(\frac{4}{3} - \frac{5}{6}\sqrt{2}\right) \quad ④$$

だから、③④を②に代入して、

$$V = 2\pi\left[\frac{\sqrt{2}}{8}\frac{1}{a}\sqrt{\frac{1}{b}} - \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{1}{b}}\left(\frac{4}{3} - \frac{5}{6}\sqrt{2}\right)\right]$$

$$= \frac{2\pi}{a\sqrt{b}}\left[\frac{13}{24}\sqrt{2} - \frac{2}{3}\right]$$
//

2016

第2問

[解] $3a = b^3,\ 5a = c^2$ …①

(1) ①から b, c は各々 $3, 5$ でわり切れる（$\because 3, 5 \in \mathrm{prime}$）したがって

$b' = \frac{1}{3}b,\ c' = \frac{1}{5}c\ (\in \mathbb{N})$ として ①に代入

$$a = 9b'^3,\quad a = 5c'^2 \quad \cdots ②$$

より a は 3と5でわり切れる □

(2) a の素因数 p ($p \neq 3, 5,\ p \in \mathbb{N}_{\neq 1}$) があると仮定する。すると(1)と同様に、

$a = pa',\ b' = pb'',\ c' = pc''$ なる $a', b'', c'' \in \mathbb{N}$ が存在する。②に代入、

$$a' = 9p^2 b''^3 = 5pc''^2$$

したがって a' が p^2 でわり切れるので、$a' = p^2 a''$ なる $a'' \in \mathbb{N}$ が存在する。

$$a'' = 9b''^3 = \frac{5c''^2}{p}$$

ここで $p \perp 5$ 及び $\frac{5c''^2}{p} \in \mathbb{N}$ から、c'' が p でわり切れて $c'' = pc'''$ なる $c''' \in \mathbb{N}$ がある。

$$a'' = 9b''^3 = 5pc'''^2$$

$9 \perp p$ から b'' が p でわり切れ、したがって a'' が p^3 でわり切れる。

以上から a は p^6 でわり切れる …③

一方 題意から α^t ($t \in \mathbb{N}_{\geq 6}$) の形の素因数を a はもたない …④

③④より矛盾が生じ、したがって $p = 1, 3, 5$ となり題意は示された □

(3) (1),(2)から $a = 3^k 5^l$ ($k, l \in \mathbb{N}_{\leq 5}$) とおける。②に代入

$$3^k 5^l = 9 \cdot b'^3 = 5 \cdot c'^2$$

したがって $b' = 3^n 5^m,\ c' = 3^x 5^y$ ($n, m, x, y \in \mathbb{Z}, 0 \sim 5$) とおけて、

$$3^k 5^l = 3^{3n+2} 5^{3m} = 3^{2x} 5^{2y+1}$$

$$\therefore \begin{cases} k = 3n+2 = 2x \\ l = 3m = 2y+1 \end{cases}$$

これをみたす (k, l) は $(k, l) = (2, 3)$ のみで、

$$a = 3^2 \cdot 5^3 \ //$$

略々 $a' = 9p^2 b'^3$

$\frac{a}{d^6}$

$a'' = b''^3 = \frac{5c''^2}{9p'}$