第1問

OK

[解] (1) $0<r<1$ の時、$r=\frac{1}{T}$ $(T>1)$ とおける。2項定理から

$$T^n=\{1+(T-1)\}^n=(T-1)^n+\cdots {}_nC_k(T-1)^k+\cdots > {}_nC_{k+1}(T-1)^k$$

だから、$n>0$ の時、

$$0<n^k\cdot r^n=\frac{n^k}{T^n}<\frac{n^k}{{}_nC_{k+1}(T-1)^{k+1}}=\underbrace{\frac{n^k}{n(n-1)\cdots(n-k)}}\ \frac{(k+1)!}{(T-1)^{k+1}} \quad \cdots ①$$

$$\frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!}$$

〰の部分は

$$〰=\frac{1}{n(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k}{n})}\longrightarrow 0 \quad (n\to+\infty)$$

となるから、①の右辺は0に収束する。したがってはさみうちから、

$$n^k\cdot r^n\longrightarrow 0$$

だから、$n=1,2$ として題意は示された。□

(2) $S_m=\sum_{k=1}^{m}k\cdot r^k$, $b_n=\frac{1}{2}n(n+1)$ から $T_n=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k(k+1)\cdot r^k \quad \cdots ②$

である。シグマの公式から

$$S_m=\left\{\frac{m}{r-1}-\frac{1}{(r-1)^2}\right\}r^{m+1}+\frac{r}{(r-1)^2}$$

$$=\frac{1}{r-1}\cdot m\cdot r^{m+1}-\frac{1}{(r-1)^2}r^{m+1}+\frac{r}{(r-1)^2}\xrightarrow{m\to\infty}\frac{r}{(r-1)^2} \quad (\because (1))$$

$$\left(\frac{n}{r-1}-\frac{1}{(r-1)^2}\right)r^{n+1}+\frac{r}{(r-1)^2}$$

である。ここで、$P_n=\sum_{k=1}^{n}k^2\cdot r^k$ とおく。

$$P_n(1-r)=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\cdot r^k-n^2\cdot r^{n+1}$$

$$=2\sum_{k=1}^{n}k\cdot r^k-\sum_{k=1}^{n}r^k-n^2\cdot r^{n+1}$$

$$=2S_n-\sum_{k=1}^{n}r^k+n^2\cdot r^{n+1} \quad \cdots ③$$

ここで、(1)から $n^2\cdot r^{n+1}\longrightarrow 0$, $\sum_{k=1}^{n}r^k=\frac{r\{1-r^n\}}{1-r}\longrightarrow\frac{r}{1-r}$ だから、③から、

$$P_n(1-r)\xrightarrow{n\to\infty}\frac{2r}{(1-r)^2}-\frac{r}{(1+r)}=\frac{r(1+r)}{(1-r)^2} \quad \cdots ④$$

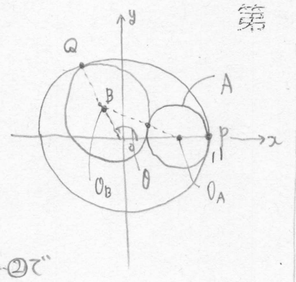
であり、

$$T_n=\frac{1}{2}\{P_n+S_n\}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{2}\left[\frac{r(1+r)}{(1-r)^3}+\frac{r}{(1-r)^2}\right]=\frac{r}{(1-r)^3}$$

2005 Tk 23年 [2]　OK

第 2 問

[解] $0 < \theta \leq 2\pi$ …① として良い。



(1) $P(1,0)$，円の中心が原点となるような座標平面を設定する。この時，$Q(\cos\theta, \sin\theta)$ として良い。円A, Bの半径 r_A, r_B，中心 O_A, O_B とする。内接，外接条件から，まず $0 < r_A, r_B < 1$ …② で

$$\overline{OO_A} = 1 - r_A,\ \overline{OO_B} = 1 - r_B\quad \overline{O_AO_B} = r_A + r_B \quad \cdots ③$$

となる。対称性から，$0 < \theta \leq \pi$ でかんがえる。$\theta \neq \pi$ の時，$\triangle OO_AO_B$ に余弦定理を用いて，③から

$$(r_A + r_B)^2 = (1-r_A)^2 + (1-r_B)^2 - 2(1-r_A)(1-r_B)\cos\theta$$

$$2r_Ar_B = -2(r_A + r_B) + 2 - 2(1-r_A)(1-r_B)\cos\theta \quad \cdots ④$$

$\theta = \pi$ の時もこの式は成立する。そこで $\alpha = r_A + r_B$，$\beta = r_Ar_B$，AとBの面積和Tとして，

$$T = \pi(r_A^2 + r_B^2) = \pi(\alpha^2 - 2\beta) \quad \cdots ⑤$$

④に代入して

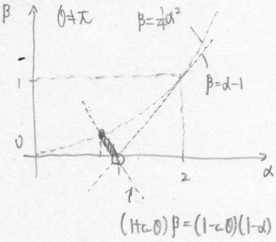
$$\beta = -\alpha + 1 - (1 + \beta - \alpha)\cos\theta$$

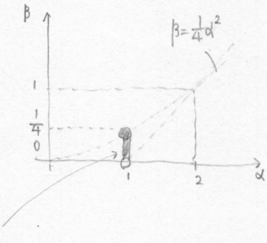
$$(1+\cos\theta)\beta = (1-\cos\theta)(1-\alpha) \quad \cdots ⑥$$

一方，r_A, r_B は x の2次方 $x^2 - \alpha x + \beta = 0$ の $0 < x < 1$ をみたす2実解(重解含む)だから，

$$\begin{cases} \text{端点}: \beta > 0,\ 1 - \alpha + \beta > 0 \\ \text{判別式}: \alpha^2 - 4\beta \geq 0 \\ \text{軸}: 0 < \frac{\alpha}{2} < 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 < \beta,\ \alpha - 1 < \beta \\ \beta \leq \frac{1}{4}\alpha^2 \\ 0 < \alpha < 2 \end{cases} \quad \cdots ⑦$$

である。⑥，⑦を図示すると，下図太線部





したがって，$t = \tan^2\frac{\theta}{2}$ として，

$$\begin{cases} 0 < \theta < \pi \text{ の時，} \beta = t^2(1-\alpha) \quad \left(2\frac{1-\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} t \leq \alpha < 1\right) \\ \theta = \pi \text{ の時} \quad \alpha = 1,\ 0 < \beta \leq \frac{1}{4} \end{cases} \quad \cdots *$$

である。

1° $0 < \theta < \pi$ の時

⑤から

$$\frac{T}{\pi} = \alpha^2 - 2t^2(1-\alpha) = \alpha^2 + 2t^2\alpha - 2t^2 = (\alpha + t^2)^2 - t^4 - 2t^2$$

で，$t > 0$ と*から，$\alpha = 2\frac{1-\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} t\ (\equiv pt)$ でTはminで，

$$\min\frac{T}{\pi} = p^2t^2 + 2pt^3 - 2t^2 = (p^2 + 2pt - 2)t^2$$

である。$C = \cos\frac{\theta}{2}$，$S = \sin\frac{\theta}{2}$ として，

$$\frac{T}{\pi} = \left[4\frac{(1-S)^2}{C^2} + 4\frac{S(1-S)}{C^2} - 2\right]t^2$$

$$= \frac{2(S-1)^2S^2}{C^4}$$

$$= \frac{2(1-S)^2S^2}{(1-S^2)^2} = \frac{2S^2}{(1+S)^2} \quad \cdots ⑧$$

$\theta = \pi$ の時，*から，$\min\frac{T}{\pi}$ は $(\alpha, \beta) = (1, \frac{1}{4})$ の時の $\frac{1}{2}$ で，この時も⑧で良い。

又，$\pi \leq \theta \leq 2\pi$ の時も対称性よりこれで良いので，(θ と $2\pi - \theta$ でとりかえて同様になる)

$$S_\theta = 2\pi\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2 \ /\!/$$

(2) $x = 1 + S$ とすると，$0 \leq x \leq 2$ であり，

$$\frac{S_\theta}{2\pi} = \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2$$

でこれは $x = 2$ の時 最大値 $S_\theta = \frac{\pi}{2}$ $/\!/$ をとる。

$$\frac{\frac{1}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}}{\frac{1}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\beta = t(1-\alpha) = \frac{1}{4}\alpha^2$$

$$\alpha^2 + 4t\alpha - 4t = 0$$

$$b(1+b)$$

$$4\frac{(1-S)(1-S+C)}{C^2}\quad \frac{S^2}{C^2} - 2\frac{S\cdot C^3}{C^4}\quad 2\frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{2[(1-S)^2S^2 + (1-S)CS^2] - SC^3}{C^4}$$

$$2[S^4 - 2S^3 + S^2 + CS^2 - CS^3]$$

$$2S^4 - 4S^3 + 2S^2 + 2CS^2 - CS(2S^2 + C^2)$$

$$CS - CS(S^2+1)$$

$$CS(2S - S^2 - 1)$$

$$\frac{S(S-1)^2[2S-C]}{C^4}\qquad \frac{2S^2(S-1)^2 - CS(S-1)^2}{C^4}$$