[解] (1) S_1, S_2, S_3 は、$\triangle OPQ$ の xy 平面, yz 平面, zx 平面への正射影の面積である。
そこで、$\triangle OPQ$ を含む平面の単位法線ベクトルを $\vec{m}=\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ とする。xy, yz, zx 平面の
単位法線ベクトル, $\vec{a_1}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{a_2}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{a_3}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\vec{m}$ のなす角を各々 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ とすると、

$$\cos\theta_1 = \frac{\vec{a_1}\cdot\vec{m}}{|\vec{a_1}||\vec{m}|} = Z,\ \cos\theta_2 = X,\ \cos\theta_3 = Y \quad \cdots ①$$

となる。正射影の性質より、$S_k = S\cdot\cos\theta_k$ $(k=1.2.3)$ だから、

$$S_1^2+S_2^2+S_3^2 = S(\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2+\cos^2\theta_3) = S(X^2+Y^2+Z^2) \quad (\because ①)$$

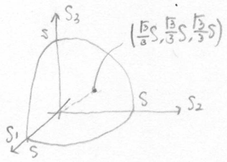
$$= S^2 \quad (\because |\vec{m}|=1)$$

である。□

(2) $k=S_1+S_2+S_3$ とおき、k の max, min を考える。(1) 及び $S_1, S_2, S_3 \geqq 0$ から、$S_1 S_2 S_3$ 空間で、
(S_1, S_2, S_3) は

$$\begin{cases} S_1^2+S_2^2+S_3^2=S^2 \\ S_1, S_2, S_3 \geqq 0 \end{cases}$$

をうごく。これと平面 $k=S_1+S_2+S_3$ が共有点を持つ条件から、



$$S \leqq k \leqq \sqrt{3}S \quad \cdots ②$$

したがって、

$$\min k = S,\ \max k = \sqrt{3}S \ //$$

である。

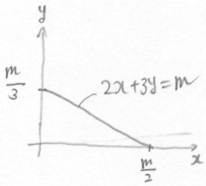
((1) で、$\vec{m}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とすれば $k=S$, $\vec{m}=\frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすれば $k=\sqrt{3}S$ となる。)

2023

別かい

第２問

[解] $\begin{cases} 2x+3y=m & \cdots ① \\ -2m+3m=m & \cdots ② \end{cases}$



①,②を辺々引いて,

$$2(x+m)+3(y-m)=0$$

2と3は互いに素だから, $k\in\mathbb{Z}$として,

$$x+m=3k,\ y-m=-2k$$

$$(x,y)=(3k-m,\ -2k+m)$$

このうち, $0\leq x\leq \frac{m}{2}$ をみたすkの数が$N(m)$であるから,

$$N(m)=\left(\frac{m}{3}\leq k\leq\frac{m}{2}\text{ をみたす }k\in\mathbb{Z}\text{の数}\right) \quad \cdots ③$$

である

(1) ③に注意して, mを6でわったあまりで場合分けする。$t\in\mathbb{N}$である.

$m=6t$の時 $N(m)=3t-2t+1=t+1$

$m=6t-1$ 〃 $N(m)=(3t-1)-(2t-1)=t$

$m=6t-2$ 〃 $N(m)=(3t-1)-(2t-1)=t$

$m=6t-3$ 〃 $N(m)=(3t-2)-(2t-2)=t$

$m=6t-4$ 〃 $N(m)=(3t-2)-(2t-2)=t$

$m=6t-5$ 〃 $N(m)=(3t-3)-(2t-2)=t+1$

より, たしかに $N(m+6)=N(m)+1$ は成立する ∎

(2) $f(m)=1-m+\left[\frac{m}{2}\right]+\left[\frac{2}{3}m\right]$ とおく. (1)と同様にすると,

$m=6t$の時, $f(m)=1-6t+3t+4t=t+1$

$m=6t-1$ 〃 $f(m)=1-(6t-1)+(3t-1)+(4t-1)=t$

$m=6t-2$ 〃 $f(m)=1-(6t-2)+(3t-1)+(4t-2)=t$

$m=6t-3$ 〃 $f(m)=1-(6t-3)+(3t-2)+(4t-2)=t$

$m=6t-4$ 〃 $f(m)=1-(6t-4)+(3t-2)+(4t-3)=t$

$m=6t-5$ 〃 $f(m)=1-(6t-5)+(3t-3)+(4t-4)=t-1$

よりたしかに $f(m)=N(m)$ である ∎

[別(2)]

$6k-2m+$

$0\leq 3k-m\leq\frac{m}{2}$

$m\leq 3k\leq\frac{3}{2}m$

$\frac{m}{3}\leq k\leq\frac{m}{2}$

$2t-2 \quad 2t-\frac{5}{3} \quad 2t-1$

$2t-\frac{1}{3},\ 2t$

$2t-1$

$\frac{5}{3}\leq\frac{5}{2}$

$2t \quad 2t-\frac{4}{3} \quad 2t-1$

$\cancel{1},\ 2,\ \cancel{3}$

6

$2,\ 3$

$\frac{2}{3}\sim 1$

-10

$2t-2$

$4t-\frac{8}{3}$