2007

第 1 問

[解] $a_n = \tan(11n)$

(1) (与式) $\Leftrightarrow \dfrac{15598}{4965} < \pi < \dfrac{15642}{4975}$ …① より①を示す.

(左辺) < 3.141592, (右辺) > 3.141594 だから. 題意と

あわせて①は示された ■

(2) $\tan\theta$ は周期 π の周期関数だから $\tan 11 = \tan(11-3\pi)$ である.

(1)から $\dfrac{\pi}{711} + \dfrac{\pi}{2} < 11 - 3\pi < \dfrac{\pi}{709} + \dfrac{\pi}{2}$ であり. これが $\frac{\pi}{2}$ から π の区間内

だから. $\tan(11-3\pi) < 0$ …①

同様に. $\dfrac{\pi}{711} < 22 - 7\pi < \dfrac{\pi}{709}$ だから. $\tan(22-7\pi) > 0$ …②

①.②から $a_1 < 0 < a_2$ //

(3) 数列 $\{b_n\}$ を. $b_n = a_{2n-1}$ によって定めると. $b_n = \tan(22n-11)$ で

ある. (1)の各辺 $2n-1$ (>0) 倍して.

$$\frac{2n-1}{711}\pi < 22n - 11 - \frac{7}{2}(2n-1)\pi < \frac{2n-1}{709}\pi$$

$$\frac{2n-1}{711}\pi + \frac{1}{2}\pi < 22n - 11 - 7n\pi < \frac{2n-1}{709}\pi + \frac{1}{2}\pi \quad \cdots ③$$

$n = 1, 2, \cdots, 355$ の時. $0 < \dfrac{2n-1}{711}\pi < \dfrac{2n-1}{709}\pi \leq \pi$ であり. …④

さらに.

$$\frac{2n+1}{711} - \frac{2n-1}{709} = \frac{1}{711\cdot 709}(-4n + 1420) \geq \frac{1}{711\cdot 709}\cdot 0 = 0 \quad \cdots ⑤$$

だから. $t_n = 22n - 11 - 7n\pi$ とおくと ③,④,⑤から

$$\frac{\pi}{2} < t_1 < t_2 < \cdots < t_{355} \leq \pi$$

同区間で $\tan x$ は単調増加だから. $\tan t_k$ $(k = 1, 2, \cdots, 355)$ は

単調増加. したがって題意は示された ■

(4) (3)から $0 < \tan\left(\dfrac{709}{711} + \dfrac{1}{2}\right)\pi < \tan t_{355}$ …⑥ であるが. 一方.

③から $\dfrac{3}{2}\pi < t_{356} < \dfrac{1}{2}\pi + \dfrac{711}{709}\pi$ だから. $\tan t_{356} < 0$ …⑦.

⑥.⑦より $\tan t_{356} < \tan t_{355}$ となり. たしかに $\{b_n\}$ は単調増加

ではない。■

$\tan 11 < 0 < \tan 22$

> 3.501
3.14
14004

4977

3.501…
1422) 4977
4266
7130
7110
200

4979
3.14
6

3.502

$+\frac{7}{2}\pi$

710

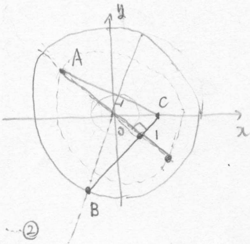
$\tan 3$

01 T.K ころも 図

第 2 問

[解] $A(a\cos\alpha, a\sin\alpha)$ $B(b\cos\beta, b\sin\beta)$とおく $(0 \leq \alpha, \beta < 2\pi \cdots ①)$と

$$\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} a\cos\alpha - 1 \\ a\sin\alpha \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} b\cos\beta - 1 \\ b\sin\beta \end{pmatrix}$$



から△ABCの面積Tとして

$$T = \frac{1}{2}\left|(a\cos\alpha-1)b\sin\beta - a\sin\alpha(b\cos\beta-1)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|ab\sin(\beta-\alpha) - b\sin\beta + a\sin\alpha\right| \quad \cdots ②$$

である。ここで、△ABCの面積が最大の時、Aを固定した時、AO⊥BCであり、

$$\begin{pmatrix} b\cos\beta - 1 \\ b\sin\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \quad (\because \alpha = \tfrac{3}{4}\pi) \quad \cdots ③$$

これが $\beta = \frac{4}{3}\pi$ の時みたされるので、

$$\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)b = 1 \quad \therefore b = \sqrt{3}+1 \quad \cdots ④$$

同様にBを固定した時 OB⊥ACで

$$\begin{pmatrix} a\cos\alpha - 1 \\ a\sin\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = 0 \quad (\because \beta = \tfrac{4}{3}\pi) \quad \cdots ⑤$$

これが $\alpha = \frac{3}{4}\pi$ でみたされるので

$$\frac{1}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})a = 1 \quad \therefore a = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+1) \quad \cdots ⑥$$

が必要。以上から④.⑥が必要である。逆にこの時、$(\alpha, \beta) = (\frac{3}{4}\pi, \frac{4}{3}\pi)$が△ABCの面積の最大値を与えることを示す。まず、△ABCの面積には必ず最大値が存在する…⑦

次に、最大値を与えるα, βは③.⑤と同等の式、

$$\begin{pmatrix} b\cos\beta - 1 \\ b\sin\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} a\cos\alpha - 1 \\ a\sin\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} b\cos(\beta-\alpha) = \cos\alpha \\ \frac{\sqrt{2}}{2}b\cos(\beta-\alpha) = \cos\beta \end{cases} \quad \cdots ⑧$$

が成り立つ。$t = \cos\alpha$とすると⑧から $\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}t$, $\cos(\beta-\alpha) = \frac{1}{b}t$ だから

$$\cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha = \frac{1}{b}t$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}t^2 \pm \sqrt{1-t^2}\sqrt{1-\tfrac{1}{2}t^2} = \frac{1}{b}t$$

$$\pm\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-\tfrac{1}{2}t^2} = t\left(\frac{1}{b} - \frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2 \quad \cdots ⑨$$

2乗してセイリすると、

$$\left(t+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left\{\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-1)t^2 - 2t + \sqrt{2}}\right\} = 0 \quad \cdots ⑩$$

〜〜 $=0$ の判別式Dとして、

$$D/4 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2}(\sqrt{3}-1) = -\sqrt{3} < 0$$

だから、⑩の実解は $t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ のみ。この時⑨で複号負が採用される。すなわち、

$$\sin\alpha\sin\beta < 0 \quad \cdots ⑪$$

以上から、⑧をみたすαは $t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ つまり $\alpha = \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi$ で、各々⑧.⑪から

$$(\alpha, \beta) = \left(\frac{3}{4}\pi, \frac{4}{3}\pi\right), \left(\frac{5}{4}\pi, \frac{2}{3}\pi\right)$$

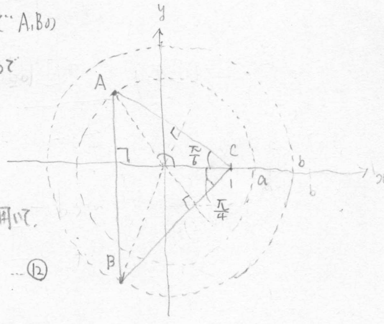
が最大値の候補。ところが対称性から、いずれも△ABCの面積が等しくなるから、

たしかに $(\alpha, \beta) = (\frac{3}{4}\pi, \frac{4}{3}\pi)$ で△ABCの面積は最大。以上から協(∵⑦)

よって、もとめる(a, b)は

$$(a, b) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+1), \sqrt{3}+1\right) \,_{/\!/}$$

(2) 図形の概形は右図。ここでA,Bのx座標は各 $-\frac{\sqrt{2}}{2}a = -\frac{1}{2}b$, $-\frac{1}{2}b$ で等しいことから、



$$\overline{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{2}b = \frac{1}{2}b^2$$

だから、△ABCに正弦定理を用いて、

$$\frac{\frac{1}{2}b^2}{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)} = 2R \quad \cdots ⑫$$

ここで⑧から

$$\cos\frac{7}{12}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{b} \quad \therefore \cos\frac{5}{12}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{b}$$

より、

$$\sin\frac{5}{12}\pi = \sqrt{1 - \frac{1}{2}\frac{1}{b^2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{b}{2\sqrt{2}}$$

だから、⑫から

$$R = \frac{2\sqrt{2}\cdot b^2}{2\cdot 2b} = \frac{\sqrt{2}}{2}b = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+1) \,_{/\!/}$$