ok 2000 〜ろじかん

第 1 問

[解] $f(x)=x^3+x^2+(a+b-a^2)x+ab$

(1) $f(x)=(x+a)(x^2+(1-a)x+b)$

(2) $g(x)=x^2+(1-a)x+b$ とおく. $g(x)=0$ の判別式 D として.

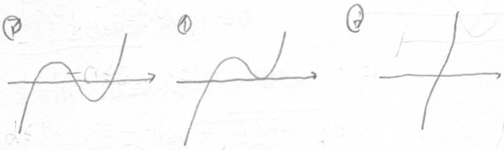
$$D=(1-a)^2-4b \quad \cdots ①$$

である。$D\geq 0$ の時 $g(x)=0$ は2実解 $\alpha, \beta\ (\alpha\leq\beta)$ を持つ

又 $g(-a)=2a^2-a+b=2(a-\frac{1}{4})^2-\frac{1}{8}+b$

である. $y=f(x)$ のグラフの概形は下図

㋐ ㋑ ㋒



㋐の時

$D>0$ であり, 題意の条件はこのもとで:

$\max(-a, \alpha, \beta)\leq 0$

$\alpha\leq\beta$ 及び $\beta=\frac{1}{2}\left[-(1-a)+\sqrt{(1-a)^2-4b}\right]$ から.

$-a\leq 0 \wedge -(1-a)+\sqrt{(1-a)^2-4b}\leq 0$

$a\geq 0 \wedge 1-a\geq 0 \wedge (1-a)^2-4b\leq(1-a)^2$

$\therefore 0\leq a\leq 1 \wedge b\geq 0$

㋑の時

$D=0$ 又は $g(-a)=0$ である.

$D=0$ の時 $g(x)=0$ の重解は $x=\frac{a-1}{2}$ で条件は

$-a\leq 0 \quad \therefore a\geq 0$

$g(-a)=0$ の時 $g(x)=0$ のもう1つの解は $x=2a-1$ であって.

条件は

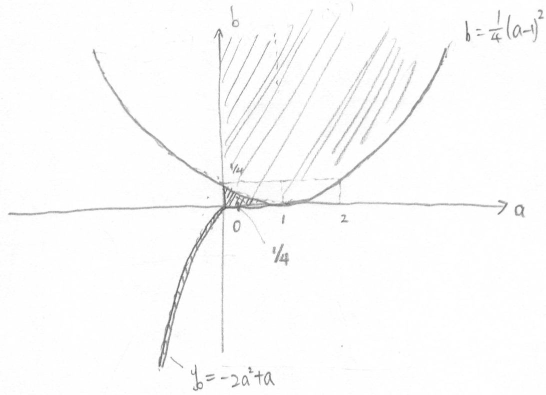
$2a-1\leq 0 \quad \therefore a\leq\frac{1}{2}$

($f(x)$ が3重解を持つとき すなわち $-a=\frac{a-1}{2} \Leftrightarrow a=\frac{1}{3}$ のときも これでよい)

㋒の時

$D<0$ であり条件は $-a\leq 0 \quad \therefore a\geq 0$

以上を図示して右上図斜線部(境界含む)



第　問

▷ $\int_0^{\pi} cs^2\theta\, d\theta$ … cs^2を直す. → $c(1-c^2)$ とすればエースへ.

$\int c\theta - \int c^3\theta = \int c\theta - \int \frac{3c+\cos 3\theta}{4}\cdot\theta$

▷エース の工夫

$\begin{cases} f\sin\theta \longrightarrow f\cos\theta \text{ (符号同じ)} \\ f\cos\theta \longrightarrow -f\sin\theta \text{ (〃 ちがう)} \end{cases}$

はじめの部積はフツウにやる

▷3倍角の公式

$\begin{cases} \cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \\ \sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \end{cases}$　$\begin{cases} \cos^3\theta = \frac{1}{4}(3\cos\theta + \cos 3\theta) \\ \sin^3\theta = \frac{1}{4}(3\sin\theta - \sin 3\theta) \end{cases}$

$\cos 3\theta = 4c^3 - 3c$

2001 Tkこうき ③

ok

第 2 問

[解] (1) $(m\geq 0, n\geq 1)$

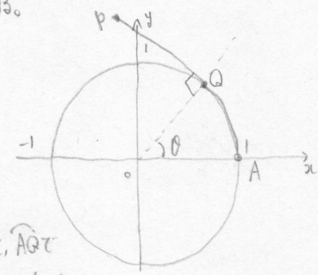
○ $a_{m+1,n}=\int_0^{\pi}\theta^{m+1}\cdot\cos n\theta\cdot d\theta=\frac{1}{n}\left[\theta^{m+1}\cdot\sin n\theta\right]_0^{\pi}-\frac{m+1}{n}\int_0^{\pi}\theta^{m}\sin n\theta\, d\theta$

$=-\frac{m+1}{n}b_{m,n}$ 図

○ $b_{m+1,n}=\int_0^{\pi}\theta^{m+1}\cdot\sin n\theta\cdot d\theta=-\frac{1}{n}\left[\theta^{m+1}\cos n\theta\right]_0^{\pi}+\frac{m+1}{n}\int_0^{\pi}\theta^{m}\cos n\theta\, d\theta$

$=(-1)^{n+1}\frac{\pi^{m+1}}{n}+\frac{m+1}{n}a_{m,n}$ 図

(2) 半径1の球面が $x^2+y^2+z^2=1$ となるように空間座標をおく。xy平面でひもがうごく領域をD,端点A(1.0.0)として,Dをx軸まわりに回転した立体の体積Vをもとめれば良い。対称性から$y\geq 0$にひもがあるとする。



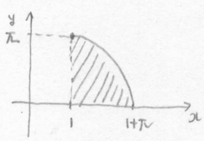
1° $1\leq x$の時

ひもの端点Pは,$(x-1)^2+y^2=\pi^2$上をうごく。

2° $x\leq 1$の時

ひもと球が,$Q(\cos\theta,\sin\theta,0)$として,$\overset{\frown}{AQ}$で球上にあるとする。この時,糸をぴんとはった時,糸の残りの部分は円の接線になっている。この時,

$\overline{PQ}=\pi-\theta$で,その方向ベクトルは$\begin{pmatrix}\cos(\theta+\pi/2)\\ \sin(\theta+\pi/2)\end{pmatrix}$だから,

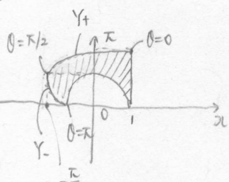


$\overrightarrow{QP}=(\pi-\theta)\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$

である。よって,以下$C=\cos\theta$, $S=\sin\theta$として,

$\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}C\\ S\end{pmatrix}+(\pi-\theta)\begin{pmatrix}-S\\ C\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}$ …①

である。



$\frac{dX}{d\theta}=-S-C(\pi-\theta)+S=-C(\pi-\theta)$ …②

だから,下表をうる。

θ	0		$\pi/2$		π
$\dot{X}$		$-$	0	$+$	
X		$\leftarrow$		$\longrightarrow$	

これと,$Y\geq 0$, $\theta=0$で$(X,Y)=(1,0)$, $\theta=\pi/2$で$\left(-\frac{\pi}{2},1\right)$, $\theta=\pi$で$(-1,0)$だから,Pのキセキの概形は右上図。図のようにY_+, Y_-を定めると,求める体積Vとして,

$V+\frac{4}{3}\pi=$  $+$ 

$=\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{1}Y_+^2\,dx-\pi\int_{-\pi/2}^{-1}Y_-^2\,dx+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot\pi^3$

$=\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}Y_+^2\frac{dX}{d\theta}d\theta-\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}Y_-^2\,dx+\frac{2}{3}\pi^4$

$=-\pi\int_0^{\pi}y^2\frac{dx}{d\theta}d\theta+\frac{2}{3}\pi^4$ …③

と表せる。ここで,$T=\int_0^{\pi}y^2\frac{dx}{d\theta}d\theta$とおくと,①,②から

$T=\int_0^{\pi}\{S+(\pi-\theta)C\}^2\cdot(-C)\cdot(\pi-\theta)\cdot d\theta$

である。$t=\pi-\theta$とすると,

$T=\int_{\pi}^{0}\{S-tC\}^2\cdot C\cdot t\cdot(-1)\,dt$ ($C=\cos t$, $S=\sin t$とした。)

$=\int_0^{\pi}(S-tC)^2tC\,dt$

$=\int_0^{\pi}\{t^3\cdot C^3-2t^2\cdot SC^2+tS^2\cdot C\}dt$

$=\int_0^{\pi}\{t^3C^3-2t^2(S-S^3)+tC(1-C^2)\}dt$

$=\int_0^{\pi}\left\{t^3\left(\frac{1}{4}\cos 3t+\frac{3}{4}C\right)-2t^2\left(\frac{1}{4}S+\frac{1}{4}\sin 3t\right)+t\left(\frac{1}{4}C-\frac{1}{4}\cos 3t\right)\right\}dt$

$=\int_0^{\pi}\left\{\frac{1}{4}(t^3-t)\cos 3t+\frac{1}{4}(3t^3+t)C-\frac{1}{2}t^2\cdot\sin 3t-\frac{1}{2}t^2\cdot S\right\}dt$ …④

である。各項計算する。

○ $\int_0^{\pi}(t^3-t)\cos 3t\,dt=\left[\frac{1}{3}(t^3-t)\sin 3t+\frac{1}{9}(3t^2-1)\cos 3t-\frac{1}{27}\cdot 6t\cdot\sin 3t-\frac{6}{81}\cos 3t\right]_0^{\pi}$

$=\left[\frac{-1}{9}(3\pi^2-1)+\frac{1}{9}+\frac{12}{81}\right]=-\frac{1}{3}\pi^2+\frac{10}{27}$

○ $\int_0^{\pi}(3t^3+t)C\,dt=\left[+(3t^3+t)S+(9t^2+1)C-(18t)\cdot S-18\cdot C\right]_0^{\pi}$

$=\left[-(9\pi^2+1)-1+36\right]=-9\pi^2+34$

○ $\int_0^{\pi}t^2\sin 3t\,dt=\left[-\frac{1}{3}t^2\cos 3t+\frac{1}{9}\cdot 2t\sin 3t+\frac{2}{27}\cos 3t\right]_0^{\pi}$

$=\frac{1}{3}\pi^2-\frac{4}{27}$

○ $\int_0^{\pi}t^2\cdot S\,dt=\left[-t^2\cdot C+2tS+2C\right]_0^{\pi}=\pi^2-4$

④に代入して

$T=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\pi^2+\frac{10}{27}\right)+\frac{1}{4}(-9\pi^2+34)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\pi^2-\frac{4}{27}\right)-\frac{1}{2}(\pi^2-4)$

$=-3\pi^2+10+\frac{2}{3}$

だから,③に代入して

$V=\frac{2}{3}\pi^4+3\pi^3-\left(10+\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\right)\pi$

$=\pi\left(\frac{2}{3}\pi^3+3\pi^2-12\right)$ //