T K 後 1999 囗

OK

第 1 問

[解1] $F_n=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 nx}{1+x}dx$ とおく。

$$F_n=\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2nx}{2(1+x)}dx \quad \cdots ①$$

で

$$\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2(1+x)}dx=\frac{1}{2}\Big[\log(x+1)\Big]_0^{\pi/2}=\frac{1}{2}\log(1+\pi/2) \quad \cdots ②$$

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\cos 2nx}{2(1+x)}dx=\frac{1}{2n}\Big[\frac{\sin 2nx}{2(x+1)}\Big]_0^{\pi/2}-\frac{1}{2n}\int_0^{\pi/2}f'(x)\cdot\sin 2nx\,dx \quad \left(f(x)=\frac{1}{2(1+x)}\right)$$

$$=-\frac{1}{2n}\int_0^{\pi/2}\sin 2nx\cdot f'(x)dx \quad \cdots ③$$

ここで、③において、区間内で $f'(x)\leq 0$ だから、

$$\frac{1}{2n}\left|\int_0^{\pi/2}\sin 2nx\cdot f'(x)dx\right|\leq\left|\frac{1}{2n}\int_0^{\pi/2}f'(x)dx\right|\xrightarrow{n\to\infty}0$$

より、はさみうちから

$$\frac{1}{2n}\int_0^{\pi/2}\sin 2nx\, f'(x)dx\longrightarrow 0 \quad \cdots ④$$

したがって、①②③④から

$$F_n\longrightarrow\frac{1}{2}\log(1+\pi/2) \quad //$$

[解2] $a_k=\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi}f(x)\cdot\sin^2 nx\,dx$ とおく。$\left[\frac{k-1}{2n}\pi,\frac{k}{2n}\pi\right]$ で $f(x)$ の max, min を与える x を各々 M_k, m_k とすると、$\sin^2 nx\geq 0$ から

$$f(m_k)\cdot\sin^2 nx\leq f(x)\sin^2 nx\leq f(M_k)\sin^2 nx$$

積分して

$$f(m_k)\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi}\sin^2 nx\,dx\leq a_k\leq f(M_k)\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi}\sin^2 nx\,dx \quad \cdots ①$$

ここで、

$$\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi}\sin^2 nx\,dx=\frac{1}{2}\Big[x-\frac{1}{2n}\sin 2nx\Big]_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi}=\frac{1}{2}\frac{\pi}{2n}$$

だから①に代入して

$$\frac{\pi}{2}\frac{1}{2n}f(m_k)\leq a_k\leq\frac{\pi}{2}\frac{1}{2n}f(M_k)$$

k について和をとって、

$$\frac{\pi}{2}\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}f(m_k)\leq F_n\leq\frac{\pi}{2}\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}f(M_k) \quad \cdots ②$$

ここで、区分求積から $n\to\infty$ として

$$\begin{cases}\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n}f(m_k)\longrightarrow\int_0^{\pi/2}f(x)dx=\log(1+\pi/2)\\ \frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n}f(M_k)\longrightarrow\log(1+\pi/2)\end{cases}$$

だから、②とはさみうちから

$$F_n\longrightarrow\frac{1}{2}\log(1+\pi/2) \quad //$$

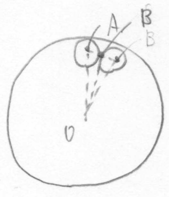
$\frac{n}{2}\pi$

ok

第２問

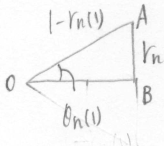
[解] k番目に描かれる円の半径を $r_n(k)$ とおく。まず初期条件から

$r_n(1)$ は、右図で $\angle AOB$（Aは円の中心、Bは接点）を $\theta_n(1)$ とおくと、$\theta_n(1) = \frac{\pi}{3n}$ だから



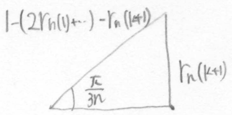
$$\sin\frac{\pi}{3n} = \frac{r_n(1)}{1-r_n(1)}$$

$$\therefore r_n(1) = \frac{\sin\frac{\pi}{3n}}{1+\sin\frac{\pi}{3n}} \quad \cdots ①$$



又、$r_n(k)$ と $r_n(k+1)$ についても同様にして、

$$\frac{r_n(k+1)}{1-2\sum_{p=1}^{k} r_n(p) - r_n(k+1)} = \sin\frac{\pi}{3n}$$



$$\frac{r_n(k+1)}{\sin\frac{\pi}{3n}} = 1-2\sum_{p=1}^{k} r_n(p) - r_n(k+1)$$

kをk+1でおきかえて辺々引く

$$\frac{r_n(k+1)-r_n(k+2)}{\sin\frac{\pi}{3n}} = r_n(k+1)+r_n(k+2)$$

$a_n = \sin\frac{\pi}{3n}$ とおくと

$$r_n(k+2) = \frac{1-a_n}{1+a_n} r_n(k+1) \quad \cdots ②$$

①、②から、等比数列の公式より、

$$r_n(k) = \left(\frac{1-a_n}{1+a_n}\right)^{k-1}\cdot\frac{a_n}{1+a_n}$$

したがって、$A = \left(\frac{1-a_n}{1+a_n}\right)$ として $|A|<1$ から

$$S_n = \lim_{k\to\infty}\sum_{p=1}^{k} r_n^2(p)\cdot\pi\cdot 3n$$

$$= \pi\left(\frac{a_n}{1+a_n}\right)^2\cdot\frac{1}{1-A^2}\cdot 3n$$

$$= \frac{3}{4}n\cdot a_n\cdot\pi \quad \cdots ㋐$$

$$C_n = \lim_{k\to\infty}\sum_{p=1}^{k} 2\pi\cdot r_n(p)\cdot 3n$$

$$= 6n\pi\,\frac{a_n}{1+a_n}\,\frac{1}{1-\frac{1-a_n}{1+a_n}}$$

$$= 3n\pi \quad \cdots ㋑$$

㋐、㋑から

(1) $S_2 = \frac{3}{4}\pi$, $C_2 = 6\pi$ //

(2) $S_n = \frac{3}{4}n\cdot\sin\frac{\pi}{3n}\cdot\pi$ //

$C_n = 3n\pi$ //

(3) $S_n = \frac{3n}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{3n}\cdot\pi$

$\longrightarrow \frac{\pi^2}{4}$ // （$n\to\infty$ で $\frac{\pi}{3n}\to 0$）

$A - Ar_1 = r_1$

$1-2e-P$

$$\frac{\cancel{(1+a_n)^2}\ a_n^2}{(1+a_n)^2-(1-a_n)^2}\quad \pi\cdot 3n$$

$$\frac{a_n^2}{4a_n}\quad \frac{3}{4}n a_n\pi$$

$1+a_n-1+a_n$

$$\frac{\pi a_n}{2a_n}$$

$1+a_n$