第 1 問

[解] まず、C_2のキセキをもとめる。題意の直線の2端点 $P(\alpha,\alpha^2)$ $Q(\beta,\beta^2)$ $(\alpha<\beta)$ とおく。

$|\overrightarrow{PQ}|>0$ より、$|PQ|=1 \Leftrightarrow |PQ|^2=1$ だから、

$$(\beta-\alpha)^2+(\beta^2-\alpha^2)^2=1$$

$$\therefore (\beta-\alpha)^2\{1+(\alpha+\beta)^2\}=1 \quad \cdots ①$$

ここで、$p=\alpha+\beta$, $q=\beta-\alpha$ とおく。$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ 及び $\alpha<\beta$ から、

$$q>0 \quad \cdots ②$$

となる。題意の中点 $M(X,Y)$ とすると、

$$\begin{cases} X=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}p \\ Y=\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)=\frac{1}{4}\{(\alpha+\beta)^2+(\beta-\alpha)^2\}=\frac{1}{4}(p^2+q^2) \end{cases} \quad \cdots ③$$

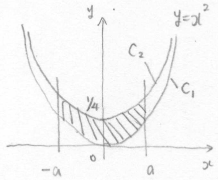
となることに注意する。さらに、①を p,q で書き換えて、

$$q^2\{1+p^2\}=1 \qquad \therefore q^2=\frac{1}{1+p^2} \quad (\because 1+p^2\neq 0)$$

で、これは②をみたす。③に代入して、pをけすと、$(p=2X)$

$$Y=\frac{1}{4}\left\{(2X)^2+\frac{1}{1+(2X)^2}\right\}=\frac{1}{4}\left(4X^2+\frac{1}{1+4X^2}\right) \quad (X\in\mathbb{R}) \quad \cdots ④$$

これがC_2のキセキである。したがって、グラフの概形は右図で、斜線部の面積がS_aである。C_1, C_2の偶関数性から、



$$\frac{1}{2}S_a=\int_0^a\left\{x^2+\frac{1}{4}\frac{1}{1+4x^2}-x^2\right\}dx$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^a\frac{1}{1+4x^2}dx \quad \cdots ⑤$$

ここで、$x=\frac{1}{2}\tan\theta$ $(0\leq\theta<\pi/2)$ とすると、$\frac{dx}{d\theta}=\frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\theta}$, 又、$a=\frac{1}{2}\tan\alpha$ $\cdots ⑥$ なるαがあるので、⑤を変形して、

$$\frac{1}{2}S_a=\frac{1}{4}\int_0^\alpha\frac{1}{1+\tan^2\theta}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\alpha$$

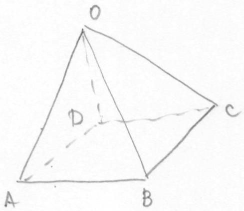
$$\therefore S_a=\frac{1}{4}\alpha \quad \cdots ⑦$$

⑥で $a\to+\infty$ とすると、$\alpha\to\pi/2$ だから⑦より

$$S_a\xrightarrow{a\to+\infty}\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{8}$$

第 2 問

[解] 対称性から、X_nがAに一致するカクリツ q_n とおくと、X_nがB, C, Dに一致するカクリツも q_n にひとしい。



X_nがOに一致するカクリツ p_n とおく。

$$p_n+4q_n=1 \quad \cdots ①$$

又、漸化式は

$$p_{n+1}=4\cdot\frac{1}{3}q_n$$
$$=\frac{1}{3}(1-p_n) \qquad (\because ①)$$

これと $p_1=0$ とから、

$$p_n=\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(0-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}$$
$$=\frac{1}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\} \quad //$$