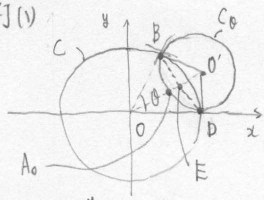
(1)?　　T.K. 後 96 I

第 1 問

[解] (1)



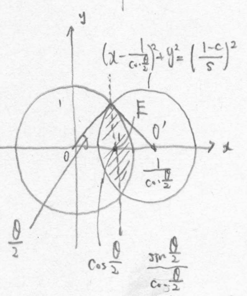
C_θの中心O', $D(1,0)$ $B(\cos\theta, \sin\theta)$とおく。以下$C=\cos\theta$, $S=\sin\theta$と略記する。題意の条件から、

$\angle ODO' = \angle OBO' = \angle R$ …①

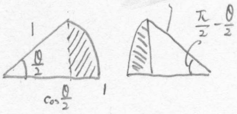
であり、$O'(X, Y)$とおくと、

$$\begin{cases} \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}X-1\\Y\end{pmatrix}=0 \\ \begin{pmatrix}C\\S\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}X-C\\Y-S\end{pmatrix}=0 \end{cases}$$

$X=1,\ Y=\dfrac{1-C}{S}$ ($\because 0<\theta<\pi$) …②



である。したがって、求める共通領域の面積S_θは右図斜線部(もとの図形を$\frac{\theta}{2}$だけ回転した)である。対称性から



$\frac{1}{2}S_\theta =$ 

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\theta}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\frac{\pi-\theta}{2}\tan^2\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\tan\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore S_\theta = \frac{1}{2}\theta + \frac{\pi-\theta}{2}\tan^2\frac{\theta}{2} - \tan\frac{\theta}{2}$$ //

(2) A_θは線分OO'上にあって、

$$\overline{OA_\theta} = \overline{OO'} - \overline{O'A_\theta} = \frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}} - \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{1-\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}$$

だから

$$\overrightarrow{OA_\theta} = \frac{1-\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$$

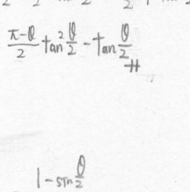
とすると、

$$X = 1-\sin\frac{\theta}{2},\quad Y = \frac{\sin\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\frac{\theta}{2}}$$

区間内で$\cos\frac{\theta}{2}>0$から、$\sin\frac{\theta}{2}$を消して

$$Y = \frac{(1-X)\cdot X}{\sqrt{1-(1-X)^2}} = \frac{(1-X)X}{\sqrt{2X-X^2}} \quad (0<X<1)$$ //

(3) (2)のグラフは区間内で$Y>0$で、概形は右図



よってもとめる体積Vは

$$V = \int_0^1 \pi Y^2 dX$$
$$= \pi\int_0^1 \frac{X^2(1-X)^2}{X(2-X)}dX$$
$$= \pi\int_0^1 \left\{(-X^2-1)+\frac{2}{2-X}\right\}dX$$
$$= \pi\left[-\frac{1}{3}X^3 - X - 2\log(2-X)\right]_0^1$$
$$= \pi\left(2\log 2 - \frac{4}{3}\right)$$ //

$\sqrt{1+\left(\frac{1-c}{s}\right)^2}$

$1+\frac{c^2-2c+1}{s^2}$

$\sqrt{\left(\frac{1+c}{2}\right)^2\left(\frac{s}{2}\right)^2}$

$\frac{\sqrt{2+2c}}{2}$

$\sqrt{\frac{2-2c}{s^2}}$

$\frac{2\sin\frac{\theta}{2}}{s}$

$2\cos\frac{\theta}{2}$

$-1+c=sY$

$\frac{\theta}{2}+\left(\frac{\pi-\theta}{2}-1\right)$

$\theta=\frac{\pi}{2}$

$\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-2\right)\cdot 1$

$4\int_{\frac{\sqrt2}{2}}^1\sqrt{1-x^2}\,dx$

$=2\int C^2 d\theta$

$=\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{\pi/4}^{\pi/2}$

$4\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)$

$\pi-2$

$\frac{\pi}{2}-1$

$\frac{(1-X)\sqrt{X}}{\sqrt{2-X}}$

$-X+2\,\overline{)\,-X^2+X}$

0.3×2.3

0.69