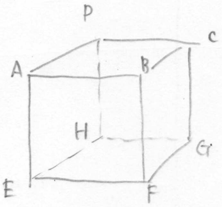
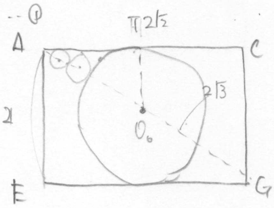
OK

第 1 問

[解] 立方体の頂点 A, B, C, D, E, F, G, H とし題意の3面を ABCD, AEFB, AEHD とする。各球の中心は立方体及び球の対称性から、平面 ACGE 上の直線 AG 上にある。S_n の中心を O_n と書くことにすると、右図の O_0T を2通りで表して



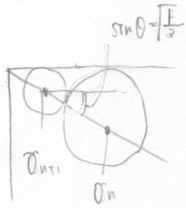
$$1 = \left(r_0 + 2(r_1 + \cdots + \overset{r_{n+1}+r_n}{r_n}) + r_{n+1}\right)\sqrt{\tfrac{1}{3}} + r_{n+1} \quad \cdots ①$$



① で $n \to n-1$ としたものと辺々引いて、

$$0 = (2r_n + r_{n+1})\sqrt{\tfrac{1}{3}} + r_{n+1} - r_n\sqrt{\tfrac{1}{3}} - r_n$$

$$= \left(\sqrt{\tfrac{1}{3}} - 1\right)r_n + \left(1 + \sqrt{\tfrac{1}{3}}\right)r_{n+1}$$



$$r_{n+1} = \frac{1-\sqrt{1/3}}{1+\sqrt{1/3}}\, r_n$$

$r_0 = 1$ とあわせて、等比数列の公式から

$$r_n = \left(\frac{1-\sqrt{1/3}}{1+\sqrt{1/3}}\right)^n$$

$$= (2-\sqrt{3})^n \quad /\!/ \ (1)$$

(2) C のうち S_k $(k = 0, 1, \cdots, n)$ に含まれない部分の体積 V_n として

$$V_n = 8 - \frac{4}{3}\pi \sum_{k=0}^{n} r_k^3$$

$$= 8 - \frac{4}{3}\pi \sum_{k=0}^{n} (2-\sqrt{3})^{3n}$$

$$= 8 - \frac{4}{3}\pi \frac{1-(2-\sqrt{3})^{3n}}{1-(2-\sqrt{3})^3}$$

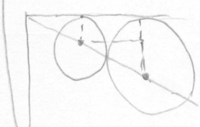
$|2-\sqrt{3}| < 1$ だから、もとめる体積 V として

$$V = \lim_{n\to\infty} V_n$$

$$= 8 - \frac{4}{3}\pi \frac{1}{1-(2-\sqrt{3})^3}$$

$$= 8 - \frac{6\sqrt{3}+10}{15}\pi \quad /\!/$$

★ (1) は例の三角形でもOK



⇒ これから出る。

$$\left(\frac{4-2\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

$$\frac{1}{1-(4+3-4\sqrt{3})}$$

$$\frac{1}{4\sqrt{3}-6}$$

$$2\ \frac{2\sqrt{3}+3}{12-9}$$

$$\frac{2}{3}$$

$$2\ \frac{1}{2\sqrt{3}-3}$$

第　　問

▷　① 楕円がある平面上で立わ

⇒ もとめる束縛条件にて

- ◦接する
- ◦面積
- ◦同一線分上の比など

TK後95 回　　OK

第 2 問

[解]

(1) 1° $X=\pm a$ の時

$Y=\pm 1$ ならば良い。(複号任意)

2° $X \neq \pm a$ の時

接線が y 軸平行でないので、2接線 l_1, l_2 を、実数 m_1, m_2 を用いて、

$$l_k : y = m_k(x-X)+Y \qquad (k=1.2)$$

と表すことが出来る。$m_1 m_2=-1$ となる条件をもとめる。ここで、座標 (x', y') を、

$$x'=\frac{x}{a},\ y'=y$$

によって定め、移動後の図形に「$'$」をつけて表す。この時、

$$\begin{cases} C' : x'^2+y'^2=1 \\ l_k' : y = m_k(ax'-X)+Y \end{cases}$$

で、C', l_k' が接するので、l_k と C' の中心 (0.0) のキョリが1である。

$$\frac{|-m_k X+Y|}{\sqrt{(am_k)^2+1}}=1$$

両辺正から2乗して、

$$a^2 m_k^2+1 = X^2 m_k^2 - 2XYm_k + Y^2$$

$$(a^2-X^2)m_k^2+2XYm_k+1-Y^2=0 \qquad \cdots①$$

①が m_1, m_2 で成立するので、m_1, m_2 は x の2次方程式

$$(a^2-X^2)x^2+2XYx+1-Y^2=0 \qquad \cdots②$$

の2解 ($X \neq \pm a$ から2次係数は0でない) である。判別式 D として

$$D/4 = (XY)^2-(a^2-X^2)(1-Y^2)$$

$$= X^2+a^2Y^2-a^2>0 \quad (\because P\text{は}C\text{の外部})$$

だから②はたしかに2異実解を持ち、

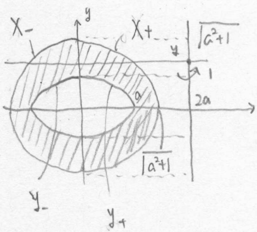
$$m_1 m_2 = \frac{1-Y^2}{a^2-X^2}=-1 \quad \therefore\ X^2+Y^2=a^2+1 \qquad \cdots③$$

$X=\pm a$ の時も③をみたすことと、この時 P は C の外部にあることから

$$X^2+Y^2=a^2+1 \quad (\text{E とおく})$$

//

(2)



$$\begin{cases} \text{E のうち } x \geq 0 \text{ の部分を } X_+,\ x \leq 0 \text{ の部分を } X_- \\ C \quad〃 \qquad x_+ \quad〃 \qquad x_- \end{cases}$$

とする。方程式から

$$\begin{cases} X = \pm\sqrt{(a^2+1)-Y^2} \\ x = \pm a\sqrt{1-y^2} \end{cases}$$

で、添字と複号が一致する。 $\cdots④$

もとめる立体の体積 V として、対称性から

$$\frac{V}{2\pi} = \int_0^{\sqrt{a^2+1}} \{(X_- - 2a)^2-(X_+ - 2a)^2\}dy$$

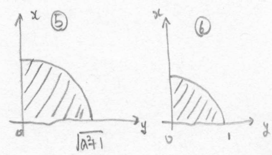
$$- \int_0^1 \{(x_- - 2a)^2 - (x_+ - 2a)^2\}dy$$

$$= \int_0^{\sqrt{a^2+1}} 4a(X_+ - X_-)dy - \int_0^1 4a(x_+ - x_-)dy \qquad (\because ④)$$

$$= 8a\underbrace{\int_0^{\sqrt{a^2+1}} \sqrt{(a^2+1)-y^2}\,dy}_{⑤} - 8a^2\underbrace{\int_0^1 \sqrt{1-y^2}\,dy}_{⑥} \qquad \cdots⑦$$

⑤.⑥は各々右の四分円の面積に相等し、

$$\begin{cases} ⑤ = \frac{\pi}{4}(a^2+1) \\ ⑥ = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$



だから⑦に代入して

$$\frac{V}{2\pi} = 2\pi(a^2+1)a - 2\pi a^2$$

$$= 2\pi a(a^2-a+1)$$

$$\therefore\ V = 4\pi^2 a(a^2-a+1)$$

//

[注]

珍しくパップス・ギュルダンで検算がキク。重心 (0,0) から、

$$V = 2\pi \cdot R \cdot S$$

$$= 2\pi \cdot 2a \cdot \pi\{(a^2+1)-a\}$$

$$= 4\pi^2 a(a^2-a+1) \quad \rightarrow \text{一致}$$

$$\frac{x^2}{a^2} = 1-Y^2$$