OK

第 1 問

[解] $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ …①

$$F(x)=\begin{cases}(a+1)x^2+(c-ab)x & (x\geq b)\ \equiv g(x)\\ (1-a)x^2+(c+ab)x & (x\leq b)\ \equiv t(x)\end{cases}\quad\cdots ②$$

②から $F(x)$は$x\neq b$で微分カノウである。①から

$$F'(x)=f(x)\quad (x\neq b)\quad\cdots ③$$

②とあわせて。

$$f(x)=\begin{cases}2(a+1)x+(c-ab) & (x>b)\\ 2(1-a)x+(c+ab) & (x<b)\end{cases}$$

これが(i)より連続である。表式から$x\neq b$では連続であって。

$$f(x)\longrightarrow ab+2b+c\quad (x\to b+0)$$
$$f(x)\longrightarrow -ab+2b+c\quad (x\to b-0)$$

左右極限がひとしく したがって $ab=0$ …④ であり この時

$$f(b)=2b+c$$

となる。④から $a=0$ 又は $b=0$。

1° $a=0$の時

②から $F(x)=x^2+cx$ となる。(ii)から $c=-1$で この時
③から $f(x)=2x-1$ となり。(iii)に反して矛盾。

2° $b=0$の時

②③から

$$F(x)=\begin{cases}(a+1)x^2+cx & (0\leq x)\\ (1-a)x^2+cx & (x\leq 0)\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}2(a+1)x+c & (0\leq x)\\ 2(1-a)x+c & (x\leq 0)\end{cases}$$

(ii)(iii)から

$$\begin{cases}a+1+c=0\\ c=1\end{cases}\quad \therefore \begin{cases}a=-2\\ c=1\end{cases}$$

以上から もとめるのは $f(x)=\begin{cases}-2x+1 & (0\leq x)\\ 6x+1 & (x\leq 0)\end{cases}$ //

$2(a+1)x+(c-ab)$

$2(1-a)x+(c+ab)$

$2ab+2b+c-ab$

$-2b+c+ab$

$F(x)=G(x)-G($

$2ab+2b+c-ab$

$1+c=0$　$c=-1$

$2x-1$

OK

第 2 問

[解] $a_n=(2-\sqrt{3})^n$ とおく。二項係数が自然数であることから、
A_n, B_n を自然数として

$$a_n=\left(2^n+{}_nC_2\cdot 2^{n-2}\cdot 3+\cdots\right)-\sqrt{3}\left({}_nC_1\cdot 2^{n-1}+{}_nC_3\cdot 2^{n-3}\cdot 3+\cdots\right)$$
$$=A_n-\sqrt{3}B_n$$

と表せる。a_{n+1} を2通りで表して、

$$A_{n+1}-\sqrt{3}B_{n+1}=(2-\sqrt{3})(A_n-\sqrt{3}B_n)$$
$$=2A_n+3B_n-\sqrt{3}(A_n+2B_n)$$

$$\therefore \begin{cases} A_{n+1}=2A_n+3B_n \\ B_{n+1}=A_n+2B_n \end{cases} \cdots ①$$

以下、「$A_n^2=3B_n^2+1$ …② が任意の $n\in\mathbb{N}$ で成立つこと」…③をM.I.で示す。$n=1$ の時の成立は明らかだから、$n=k\in\mathbb{N}$ での②の成立を仮定し、$n=k+1$ での②の成立を示す。①から

$$A_{k+1}^2=4A_k^2+9B_k^2+12A_kB_k$$
$$=3A_k^2+12B_k^2+1+12A_kB_k \quad (\because 仮定)$$
$$3B_{k+1}^2+1=3(A_k^2+4B_k^2+4A_kB_k)+1$$
$$=3A_k^2+12B_k^2+1+12A_kB_k$$

から $n=k+1$ でも②は成立。以上から③は示された。したがって
$m=A_n^2\in\mathbb{N}$, $m-1=3B_n^2$ とできて、$a_n=\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$ と表せる □

[別]

$b_n=(2+\sqrt{3})^n=A_n+\sqrt{3}B_n$ と a_n を辺々かけて…

$$1=A_n^2-3B_n^2$$

より、

$$a_n=\sqrt{A_n^2}+\sqrt{3B_n^2}=\sqrt{m}+\sqrt{m-1}$$ □

$A_n-\sqrt{3}B_n=(2-\sqrt{3})^n$

$A_n+\sqrt{3}B_n=(2+\sqrt{3})^n$

$A_1=2-\sqrt{3}$

$\sqrt{4}-\sqrt{3}$

$A_2=7-4\sqrt{3}$

$A_3=26-15\sqrt{3}$

$A_n^2-3B_n^2$