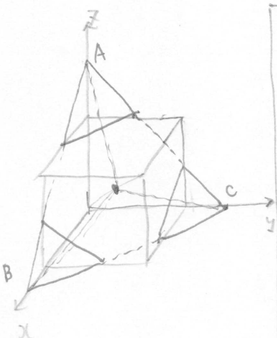
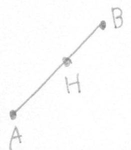
T.K. 後期数学 1993

▷ この図がわかっていれば良い。あとは軸で切った時の切断面



軸上に点を取る時、ベクトルでとる。



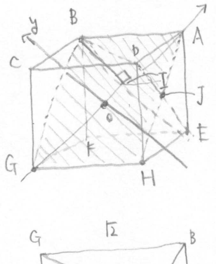
$\overrightarrow{AH} = t\overrightarrow{AB}\ (0 \leq t \leq 1)$

後で積分する時、

$$V = \int_0^1 S(t) \cdot \underbrace{\overline{AB} \cdot dt}$$

とすること

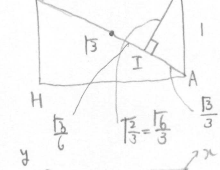
▷ ちょっとした別解を。AGをx軸、中心を原点とする。平面BDE ⊥ AG だから、



B, D, Eから下ろした垂足Iで等しい。

。D, Eはxy平面に対し対称で $D\left(\frac{\sqrt{3}}{6}, t, u\right)$ $E\left(\frac{\sqrt{3}}{6}, t, -u\right)$ とおける。

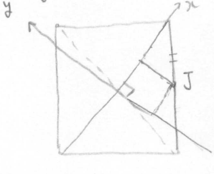
。$u = \frac{\sqrt{2}}{2}\ (= DJ)$，$t = \frac{\sqrt{3}}{6}$ から、D, Eが出て、対称性からCがわかる。



。$C\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$D\left(\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$B\left(\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, 0\right)$ だ。

$\overrightarrow{BC} \mathbin{/\!/} \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ \sqrt{6} \\ -3\sqrt{2} \end{pmatrix}$ より、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/6 \\ \sqrt{6}/6 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ \sqrt{6} \\ -3\sqrt{2} \end{pmatrix}$$



だから、$x = k$ との交点は $s = \frac{1}{12}(2\sqrt{3}k - 1)$ である

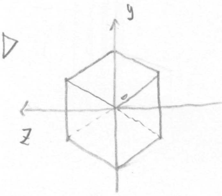
$\left(k, \frac{\sqrt{2}}{2}k + \frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{\sqrt{6}}{2}k + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ で、これをx軸のまわりに回すと、

半径 $\sqrt{2k^2 + 1/2}$ の円。

以上から

$$V = 2\left\{\int_0^{\sqrt{3}/6} \pi\left(2k^2 + \frac{1}{2}\right) dk + \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 \pi \times \frac{\sqrt{3}}{3}\right\} = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi$$

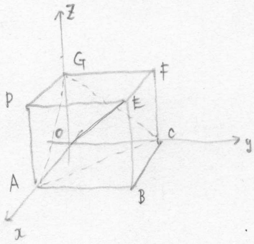
▷



x軸からみると、左のような正六角形に。

T.K. 93 後 [I]　　　　ok

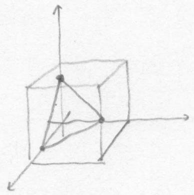
第 1 問



[解] 右のように立体の8頂点を定める。回転軸を OEとし，その方向ベクトル $\vec{l}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ に対し，OE上の点 Pを，$\overrightarrow{OP}=t\vec{l}$ $(0\leq t\leq \frac{1}{2})$ で定め，Pを通り $\vec{l}$に垂直な平面 $\pi(t)$ での立体の断面積を $S(t)$とする。

$1°\ 0\leq t\leq\frac{1}{3}$

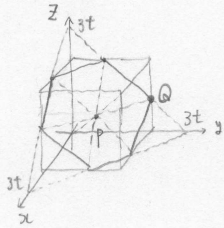
断面は3点 $(3t,0,0)$ $(0,3t,0)$ $(0,0,3t)$ を頂点とする正三角形(一辺 $3\sqrt{2}t$)で，これを $\vec{l}$を軸に回して，



$$S(t)=\pi 6t^2=6\pi t^2 \quad \cdots ①$$

$2°\ \frac{1}{3}\leq t\leq\frac{1}{2}$

断面は右のような六角形となる。対称性から，



$$S(t)=\pi\overline{PQ}^2 \quad \cdots ②$$

であり，$Q(0,1,3t-1)$ から

$$\overline{PQ}^2=\left|\begin{pmatrix}0\\1\\3t-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}t\\t\\t\end{pmatrix}\right|^2=t^2+(t-1)^2+(2t-1)^2$$

だから②に代入して，

$$S(t)=\pi(6t^2-6t+2) \quad \cdots ②$$

①,②及び立体の $t=\frac{1}{2}$を軸とする対称性から，

$$\frac{1}{2}V=\int_0^{\frac{1}{2}}S(t)\cdot\sqrt{3}\,dt$$

$$=\sqrt{3}\left[2\pi t^3\right]_0^{\frac{1}{3}}+\sqrt{3}\pi\left[2t^3-3t^2+2t\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\sqrt{3}\pi\left\{\frac{2}{27}+\left(\frac{2}{8}-\frac{3}{4}+\frac{2}{2}\right)-\left(\frac{2}{27}-\frac{3}{9}+\frac{2}{3}\right)\right\}$$

$$=\sqrt{3}\pi\frac{1}{6}$$

$$V=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi \quad //$$

$\begin{pmatrix}3t\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}t\\t\\t\end{pmatrix}$　$(2t)^2+2t^2$

$6t^2$

$x+y+z=3t$

$\sqrt{2}$

$\frac{\sqrt{3}}{4}\ 2$

$\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x+y+z=3t$　$\frac{\sqrt{2}}{2}$

$,1,3t-1$　$6^3\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{1}{2}$

$\frac{3}{2}-3+2$

$\frac{1}{2}\pi$

2π

$\frac{2}{3}\pi,\ \frac{6}{9}-\frac{6}{3}+$