Tk 1992 後

ok

第1問

[解] $f(t)=\frac{t-x}{t+1}$ とおく。 $(x\leq 1)$

$$F(x)=\begin{cases}\int_0^1 f(t)\,dt & (x\leq 0)\\ -\int_0^x f(t)\,dt+\int_x^1 f(t)\,dt & (0\leq x\leq 1)\\ -\int_0^1 f(t)\,dt & (x\geq 1)\end{cases}\quad\cdots①$$

である $\int_0^1 f(t)\,dt=\int_0^1\frac{t}{t+1}dt-x\int_0^1\frac{1}{t+1}dt$ だから $\int_0^1\frac{1}{t+1}dt>0$

とあわせて、$\int_0^1 f(t)\,dt$ は x の単調減少関数 だから ①より、

$F(x)$ は $0\leq x\leq 1$ で最小値をとる。以下この場合を調べる。

$$F(x)=\int_x^0 f(t)\,dt+\int_x^1 f(t)\,dt$$

$$=G(0)+G(1)-2G(x)\quad\cdots②$$

ただし、$G(t)$ は $f(t)$ の原始関数のうち積分定数を0とするもので、

$$G(t)=\int\left(1-\frac{x+1}{t+1}\right)dt=t-(x+1)\log(t+1)$$

②に代入して

$$F(x)=1-(x+1)\log 2-2\left(x-(x+1)\log(x+1)\right)$$

$$=2(x+1)\log(x+1)-2x-(x+1)\log 2+1$$

$$F'(x)=2+2\log(x+1)-2-\log 2$$

$$=\log\frac{(x+1)^2}{2}$$

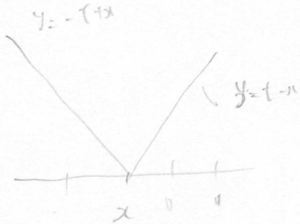
から下表を得る

x	0		$\sqrt{2}-1$		1
F'		$-$	0	$+$	
F		↘		↗	

したがって、

$$\min F(x)=F(\sqrt{2}-1)=2\sqrt{2}\log\sqrt{2}-2(\sqrt{2}-1)-\sqrt{2}\log 2+1$$

$$=3-2\sqrt{2}\ /\!/$$



$t+1-x-1$

$\frac{(x+1)^2}{2}=1$

$(x+1)^2=\sqrt{2}$

$x=\sqrt{2}-1$

$-2\sqrt{2}+$

ok

第 2 問

[解] $0<a<1$ …① ベクトル $\overrightarrow{A_nA_{n+1}}$ を表す複素数をα_nと表す.

又, $e(\theta)=c+is$ $(c=\cos\theta,\ s=\sin\theta)$とし, $p=e\left(\frac{2}{3}\pi\right)$とおく. 題意から

$$\begin{cases} \alpha_{n+1}=a\cdot p\,\alpha_n & (n\in\mathbb{N}_{\geq 0}) \\ \alpha_0=a \end{cases}$$

等比数列の公式から

$$\alpha_n=(ap)^n\cdot a$$

したがって, 点 A_nを表す複素数 t_nとおくと(複素平面上)

$$t_n=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_n$$

$$=a\frac{1-(ap)^n}{1-ap}$$

①と$|p|=1$から, $(ap)^n\to 0$ $(n\to\infty)$ だから

$$t_n\xrightarrow{n\to\infty}\frac{a}{1-ap}$$

$$=\frac{2a}{(2+a)^2+(\sqrt{3}a)^2}\left\{(2+a)+a\sqrt{3}i\right\}$$

$$=\frac{a}{2(a^2+a+1)}\left\{(2+a)+a\sqrt{3}i\right\}$$

したがって, もとめる座標は $a\in\mathbb{R}$から

$$\left(\frac{a(2+a)}{2(a^2+a+1)},\ \frac{\sqrt{3}a^2}{2(a^2+a+1)}\right)$$ //

$$\frac{a}{1-a\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}$$

$$\frac{2a}{2-a\ (-1+\sqrt{3}i)}$$

$$\frac{2a}{(2+a)\ -a\sqrt{3}i}$$