第 1 問

[解] (1) $a_n = 9^n$ //

(2) a_nのうち、1位が0のものをb_nコ, 1位が1であるものをc_nコとすると、対称性から、1位が2, 3, …

9であるものもc_nコずつあり、これらは排反だから

$$b_n + 9c_n = a_n \quad \cdots ①$$

$n+1$ケタの正整数の下2ケタに注目して場合分けしてb_{n+1}を表すと、

$$b_{n+1} = 9c_n = a_n - b_n \quad (\because ①)$$

両辺9^{n+1}でわって、$d_n = b_n/9^n$とすると

$$d_{n+1} = -\frac{1}{9}d_n + \frac{1}{9}$$

$$d_{n+1} - \frac{1}{10} = -\frac{1}{9}\left(d_n - \frac{1}{10}\right)$$

$b_1 = 0$から$d_1 = 0$だから、くり返し用いて

$$d_n = \left(-\frac{1}{9}\right)^{n-1}\left(-\frac{1}{10}\right) + \frac{1}{10}$$

$$\therefore b_n = \frac{9^n}{10}\left\{1 - \left(-\frac{1}{9}\right)^{n-1}\right\}$$

$$= \frac{9}{10}\left\{9^{n-1} - (-1)^{n-1}\right\}$$

だから、

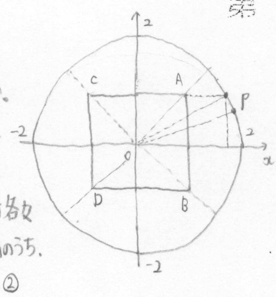
$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{10}\left(1 + \left(\frac{-1}{9}\right)^n\right) \longrightarrow \frac{1}{10} \quad (n \to \infty)$$ //

$b_2 = 9$

$C_2 = \cancel{81}\ 72$

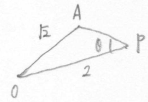
$9^n + (-9)^n$

第 2 問

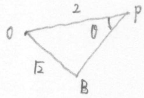


[解] $c=\cos\alpha$, $s=\sin\alpha$ に対し、P$(2c, 2s)$ とおく。
対称性から $0\le\alpha\le\pi/4$ …① で調べれば良い。
OPと角θをなす半直線 l, m とする。αによって
$0\le\alpha\le\pi/6$, $\pi/6\le\alpha\le\pi/4$ で場合分けして考える。
まず、$0\le\alpha\le\pi/6$ の時、θが最大となる時 l, m は各々 A, B を通る。したがって、$\min\angle OPB$, $\min\angle OPA$ のうち、大きくない方が最大のθを与える。 …②

$$\begin{cases} \overline{PB}^2 = (2c-1)^2+(2s+1)^2 = 6-4c+4s \\ \overline{PA}^2 = (2c-1)^2+(2s-1)^2 = 6-4(c+s) \end{cases} \quad \cdots *$$



だから、△OPA, △OPB に余弦定理を用いて、

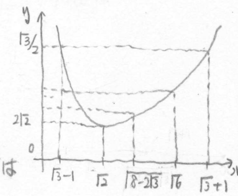


$$\cos\angle APO = \frac{2+\overline{PA}^2}{4\overline{PA}} = \frac{1}{4}\left(\overline{PA}+\frac{2}{\overline{PA}}\right) \quad \cdots ③$$

$$\cos\angle BPO = \frac{1}{4}\left(\overline{PB}+\frac{2}{\overline{PB}}\right) \quad \cdots ④$$

である。$0\le\angle APO, \angle BPO\le\pi/2$ に注意する。$y=f(x)=x+\frac{2}{x}\ (0<x)$ とすると、
$f'(x)=1-\frac{2}{x^2}$ から、下表をうる。

x	0		$\sqrt{2}$	
f'		$-$	0	$+$
f		↘	$2\sqrt{2}$	↗



したがって、グラフは右上図のようになる。*より、$\overline{PA}^2$, $\overline{PB}^2$ は
$0\le\alpha\le\pi/6$ の区間で、

$\overline{PA}^2$ … 単調減少で、2から $2(2-\sqrt{3})=(\sqrt{3}-1)^2$ までうごく。
$\overline{PB}^2$ … 単調増加で、2から $2(4-\sqrt{3})$ までうごく。

だから、③,④ 及び $y=x+\frac{2}{x}$ のグラフから、

$\cos\angle APO$ は $\overline{PA}=\sqrt{3}-1$ で $\max\frac{\sqrt{3}}{2}$、この時 $\angle APO=\pi/6$
$\cos\angle BPO$ は $\overline{PB}=\sqrt{2(4-\sqrt{3})}$ で max を与える。これは $\frac{\sqrt{3}}{2}$ より小さい。

となる。$\cos\theta$ は $0\le\theta\le\pi/6$ で単調減少だから、②より、この区間で θのみたすべき条件は

$$0\le\theta\le\pi/6 \quad \cdots ⑤$$

である。

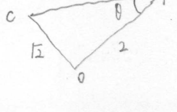
次に、$\frac{\pi}{6}\le\alpha\le\pi/4$ の時を考える。この時は θが最大となる時 l, m は各々 C, B を通る。
したがって $\min\angle OPC$, $\min\angle OPB$ のうちの大きくない方が $\max\theta$ を与える。 …⑥

$0\le\alpha\le\pi/6$ の時の考察から、$\angle OPB$ に関しては、$\alpha=\pi/4$ の時に $\cos\angle OPB$ は最大値を与え、この値は、$\overline{PB}^2=6$ より

$$\max\cos\angle OPB = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6}+\frac{2}{\sqrt{6}}\right) = \frac{\sqrt{6}}{3} < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

だから、$\cos\theta$ が $0\le\theta\le\pi/2$ では単調減少だから、$\min\angle OPB$ は $\frac{\pi}{6}$ より大きい …⑦

次に、$\angle OPC$ について



$$\begin{cases} \overline{PC}^2 = (2c+1)+(2s-1)^2 = 6+4c-4s \\ \cos\angle OPC = \frac{1}{4}\left(\overline{PC}+\frac{2}{\overline{PC}}\right) \end{cases}$$

だから、同様の考察により、

○$\overline{PC}^2$ は単調減少で $(\sqrt{3}+1)^2$ から、$\sqrt{6}$ までうごく
○グラフとあわせて、$\cos\angle OPC$ は $\overline{PA}=\sqrt{3}+1$ で $\max\frac{\sqrt{3}}{2}$ をとる。(つまり $\theta=\pi/6$)

だから、$\min\angle OPC=\pi/6$ である …⑧

⑦,⑧から、$\frac{\pi}{6}\le\alpha\le\pi/4$ の時の θの条件は

$$0\le\theta\le\pi/6 \quad \cdots ⑨$$

である。

以上⑤,⑨から、もとめる $\max\theta=\pi/6$ である。