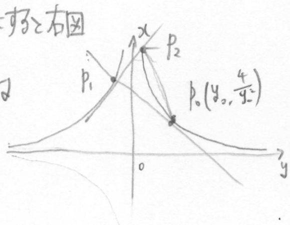
第 1 問

[解] $C: xy^2=4$ をyx平面に図示すると右図



$\left(\frac{4}{y^2}\right)' = -8\frac{1}{y^3}$ より. P_0における接線l_0は

$$l_0: x = -\frac{8}{y_0^3}(y-y_0)+\frac{4}{y_0^2}$$
$$= -\frac{8}{y_0^3}y+\frac{12}{y_0^2}$$

である. したがって, これとCの交点のy座標は

$$\left(-\frac{8}{y_0^3}y+\frac{12}{y_0^2}\right)y^2=4$$
$$8y^3-12y_0y^2+4y_0^3=0$$
$$(y-y_0)(8y^2-4y_0y-4y_0^2)=0$$

の解だから, P_1のy座標は $y_1=-\frac{1}{2}y_0$ である. さらに, この点でのCの接線l_1についても同様にして, $y_2=-\frac{1}{2}y_1=\frac{1}{4}y_0$.

(1) $P_1\left(\frac{16}{y_0^2}, -\frac{1}{2}y_0\right)$ $P_2\left(\frac{64}{y_0^2}, \frac{1}{4}y_0\right)$ #

(2) $\overrightarrow{P_0P_1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}y_0-y_0\\ \frac{16}{y_0^2}-\frac{4}{y_0^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}y_0\\ 12\frac{1}{y_0^2}\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{P_0P_2}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}y_0-y_0\\ \frac{64}{y_0^2}-\frac{4}{y_0^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}y_0\\ 60\frac{1}{y_0^2}\end{pmatrix}$

より. サラスの公式から.

$$T=\frac{1}{2}\left|-\frac{3}{2}y_0\cdot 60\frac{1}{y_0^2}+\frac{3}{4}y_0\cdot 12\frac{1}{y_0^2}\right|=\frac{81}{2}\frac{1}{y_0} \quad \cdots①$$

又, C, 線分P_0P_2で囲まれる面積T'として

$$T' = ▢ - ▢ = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{y_0^2}+\frac{64}{y_0^2}\right)\cdot\frac{3}{4}y_0-\int_{\frac{1}{4}y_0}^{y_0}\frac{4}{y^2}dy$$
$$=\frac{51}{2}\frac{1}{y_0}+\left[\frac{4}{y}\right]_{\frac{1}{4}y_0}^{y_0}=\frac{27}{2y_0} \quad \cdots②$$

①,②から

$$S=T-T'=27\frac{1}{y_0}$$

したがって

$$\frac{T}{S}=\frac{81/2}{27}=\frac{3}{2}$$ #

(3) l_0のカタムキ $-\frac{8}{y_0^3}$, l_1のカタムキ $-\frac{8}{y_1^3}$ だから, $\angle P_0P_1P_2=\angle R$なる条件は

$$-\frac{8}{y_0^3}\left(-\frac{8}{y_1^3}\right)=-1 \quad \therefore y_0=2^{\frac{3}{2}}$$ #

(2) $\angle P_0P_1P_2=\angle R$のとき. $\triangle P_0P_1P_2$の外接円の直径Rとすると

$$R=\overline{P_0P_2}=\sqrt{\frac{9}{16}y_0^2+60^2\cdot\frac{1}{y_0^4}}=\sqrt{\frac{9}{2}+\cancel{\frac{225}{4}}}$$
$$=\frac{9}{2}\sqrt{3}$$

だから, この面積S'は

$$S'=\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2=\frac{\pi}{4}\frac{81}{4}\cdot 3=\frac{243}{16}\pi$$ #

2007 [3]

第 3 問

[解] $t \in \mathbb{N}$とおく。題意より.

$$k_0 = 1,\ p_0 = p_1 = x_1,\ q_0 = q_1 = x_N \quad \cdots ①$$

$$\begin{cases} k_{2t-1} = \left(x_i \leq \dfrac{p_{2t-2}+q_{2t-2}}{2} \text{ をみたす } x_i \text{ の個数} \right) \\ k_{2t} = k_{2t-1} \end{cases} \quad \cdots ②$$

$$\begin{cases} p_{2t+1} = p_{2t} \\ p_{2t} = \dfrac{1}{k_{2t}} \displaystyle\sum_{i=1}^{k_{2t}} x_i \end{cases} \quad \cdots ③$$

$$\begin{cases} q_{2t+1} = q_{2t} \\ q_{2t} = \dfrac{1}{N-k_{2t}} \displaystyle\sum_{i=k_{2t}+1}^{N} x_i \end{cases} \quad \cdots ④$$

(1) 題意を帰納法で示す。$n=0$の時は①から成立。以下$n=m\in\mathbb{N}$での成立を仮定する。

1° $m \in$ even

$p_{m+1} = p_m$ (∵③), $q_{m+1} = q_m$ (∵④) から仮定より $x_1 \leq p_{m+1} < q_{m+1} \leq x_N$ …⑤

又 仮定より

$$x_1 < \frac{p_m + q_m}{2} < x_N$$

だから $1 \leq k_{m+1} \leq N-1$ …⑥　⑤⑥から$n=m+1$でも題意は成立。

2° $m \in$ odd

$k_{m+1} = k_m$ (∵②) より $1 \leq k_{m+1} \leq N-1$ …⑦ である。③④から

$$p_{m+1} = \frac{1}{k_m}\sum_{i=1}^{k_m} x_i = \frac{x_1 + \cdots + x_{k_m}}{k_m}$$

$$q_{m+1} = \frac{1}{N-k_m}\sum_{i=k_m+1}^{N} x_i = \frac{x_{k_m+1} + \cdots + x_N}{N-k_m}$$

及び $x_1 \leq \cdots \leq x_N$, $x_1 < x_N$ から.

$$\frac{k_m \cdot x_1}{k_m} \leq p_{m+1} \underset{\sim}{\leq} \frac{k_m \cdot x_{k_m}}{k_m} \underset{\sim}{\leq} \frac{N-k_m}{N-k_m} x_{k_m+1} \underset{\sim}{\leq} q_{m+1} \leq \frac{N-k_m}{N-k_m} x_N$$

$$x_1 \leq p_{m+1} \leq q_{m+1} \leq x_N$$

ここで "〜部の不等号が全て成立する" ことはない (∵ $x_1 < x_N$) ので.

$$x_1 \leq p_{m+1} < q_{m+1} \leq x_N \quad \cdots ⑧$$

以上⑦,⑧から$n=m+1$でも題意は成立。

以上1°,2°から示された 圏

(2) 1° $n \in$ evenの時

$$\begin{cases} J_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{k_{n-1}} (x_i - p_n)^2 + \sum_{i=k_{n-1}+1}^{N} (x_i - q_n)^2 \\ J_{n-1} = \displaystyle\sum_{i=1}^{k_{n-1}} (x_i - p_{n-1})^2 + \sum_{i=k_{n-1}+1}^{N} (x_i - q_{n-1})^2 \end{cases}$$

だから

$$J_{n-1} - J_n = \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{k_{n-1}} (x_i - p_{n-1})^2 - \sum_{i=1}^{k_{n-1}} (x_i - p_n)^2 \right]}_{⑨} + \underbrace{\left[\sum_{i=k_{n-1}+1}^{N} (x_i - q_{n-1})^2 + \sum_{i=k_{n-1}+1}^{N} (x_i - q_n)^2 \right]}_{⑩} \cdots ⑪$$

である。ここで xの2次方程式

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k_{n-1}} (x_i - x)^2 = k_{n-1} \cdot x^2 - 2\sum_{i=1}^{k_{n-1}} x_i \cdot x + \sum_{i=1}^{k_{n-1}} (x_i)^2$$

をかんがえる。$p_n = \dfrac{1}{k_{n-1}} \displaystyle\sum_{i=1}^{k_{n-1}} x_i$ より, かきかえて.

$$f(x) = k_{n-1}\left[x^2 - 2p_n x + A\right] = k_{n-1}(x - p_n)^2 + A - k_{n-1} \cdot p_n^2 \quad (A\text{は定数})$$ だから,

$f(x)$は$x = p_n$で最小値をとるので. (∵ $k_{n-1} > 0$)

$$⑨ \geq 0$$

同様に, $g(x) = \displaystyle\sum_{i=k_{n-1}+1}^{N} (x_i - q_n)^2$ とおくと, ⑩ ≥ 0 を示せる。以上から⑪に代入して

$$J_{n-1} - J_n \geq 0 \quad \text{圏}$$

2° $n \in$ oddの時

$$\begin{cases} J_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{k_n} (x_i - p_{n-1})^2 + \sum_{i=k_n+1}^{N} (x_i - q_{n-1})^2 \\ J_{n-1} = \displaystyle\sum_{i=1}^{k_{n-1}} (x_i - p_{n-1})^2 + \sum_{i=k_{n-1}+1}^{N} (x_i - q_{n-1})^2 \end{cases}$$

である。

ア $k_n < k_{n-1}$ の時

$$J_{n-1} - J_n = \sum_{i=k_n+1}^{k_{n-1}} \left[(x_i - q_{n-1})^2 - (x_i - p_{n-1})^2 \right]$$

$$= \sum_{i=k_n+1}^{k_{n-1}} 2\left(x_i - \frac{p_{n-1} + q_{n-1}}{2} \right)(q_{n-1} - p_{n-1})$$

ところで k_{n-1}の定義から $x_i \leq \dfrac{p_{n-1} + q_{n-1}}{2}$, 又(1)から $p_{n-1} < q_{n-1}$ だから

$$J_{n-1} - J_n \geq 0$$

イ $k_n = k_{n-1}$の時 … $J_{n-1} = J_n$

ウ $k_n > k_{n-1}$の時 … アと同じく $J_{n-1} \geq J_n$

以上から $J_{n-1} \geq J_n$ 圏

(3) (2)から

$$J_0 \geq J_1 \geq \cdots \geq \quad \cdots ⑫$$

又. k_n, p_n, q_nはいずれも有限個の値をとるので J_nも有限個の値をとる。⑫から.

ある$m \in \mathbb{N}$があって.

$$J_{m-1} = J_m = J_{m+1} = \cdots$$

となる。mは4以上の偶数として良い。この時. m以上の整数nに対して題意が成立することを示す。

1° $n \in$ even

②から$k_n = k_{n-1}$, (2)1°から. $J_{n-1} = J_n$の等号成立条件より. $p_n = p_{n-1}$, $q_n = q_{n-1}$

2° $n \in$ odd

③④から. $p_n = p_{n-1}$, $q_n = q_{n-1}$である。$m \in$ even及び$n \geq m$から$n-1$はm以上の偶数。

1°から

$$p_{n-1} = p_{n-2} = p_{n-3}\ (∵③),\quad q_{n-1} = q_{n-2} = q_{n-3}\ (∵④)$$

したがって.

$$k_n = \left(x_i \leq \frac{p_{n-1} + q_{n-1}}{2} \text{ をみたす } x_i \text{ の個数} \right)$$

$$= \left(x_i \leq \frac{p_{n-3} + q_{n-3}}{2} \quad 〃 \quad \right)$$

$$= k_{n-1}$$

以上から示された 圏