第 1 問

[解] $x(t)=2t+t^2,\ y(t)=t+2t^2$ とおく。

(1) $x'(t)=2(1+t)$. $y'(t)=4t+1$ だから. $t\neq-1$ の時

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)}=\frac{4t+1}{2(1+t)}$$ //

(2) $t=-1$ の時不適。よって $t\neq-1$ で. (1)から

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{4t+1}{2(t+1)}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow t=-\frac{2}{5}$$

だから.

$$x\left(-\frac{2}{5}\right)=-\frac{16}{25},\quad y\left(-\frac{2}{5}\right)=-\frac{2}{25}$$

より. $A\left(-\frac{16}{25},-\frac{2}{25}\right)$ //

(3) 題意から

$$\begin{cases} X=\frac{\sqrt{5}}{5}(4t+2t^2-t-2t^2)=\frac{3}{5}\sqrt{5}\,t \\ Y=\frac{\sqrt{5}}{5}(2t+t^2+2t+4t^2)=\frac{\sqrt{5}}{5}(5t^2+4t) \end{cases}$$

$t=\frac{\sqrt{5}}{3}X$ を代入して

$$Y=\frac{\sqrt{5}}{5}\left\{5\cdot\frac{5}{9}X^2+\frac{4}{3}\sqrt{5}X\right\}=\frac{5}{9}\sqrt{5}X^2+\frac{4}{3}X$$ //

(4) (3)の変換 f とおく。α を, $0<\alpha<\pi/2$. $\tan\alpha=\frac{1}{2}$ をみたす角とおくと,

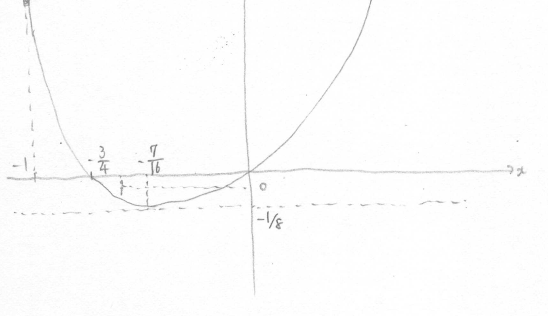
$$(X+Yi)=(\cos\alpha+i\sin\alpha)(x+yi)$$

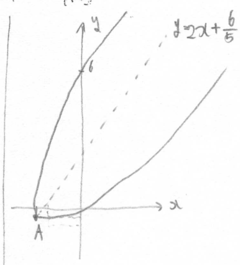
から. f は曲線 C を原点中心に α だけ回転させる変換である。したがって. (3)から. C は, $y=\frac{5}{9}\sqrt{5}x^2+\frac{4}{3}x\equiv f(x)$ を原点中心に $-\alpha$ だけ回転させた曲線である。C の頂点での接線の傾きは $\tan(-\alpha)=-\frac{1}{2}$ であり. 放物線の異なる点における接線は平行ではないこと及び(2)から. C の頂点は A。

以下. 特徴のある点をもとめる.

$$\left|\begin{array}{lll} x=0\Leftrightarrow t=0,-2 & \text{に対応するのは} & (0,0).(0,6) \\ y=0\Leftrightarrow t=0,-\frac{1}{2} & \text{〃} & (0,0).\left(-\frac{3}{4},0\right) \\ \frac{dy}{dx}=0\Leftrightarrow t=-\frac{1}{4} & \text{〃} & \left(-\frac{1}{8},-\frac{7}{16}\right) \\ t=-1 \text{ に対応するのは } (-1,1) & & \end{array}\right.$$

以上から. C のグラフは下図



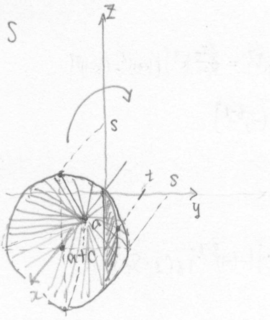


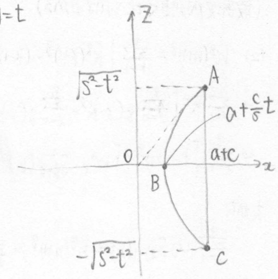
$\frac{3}{4}>\frac{16}{25}>\frac{7}{16}$

75 > 64 > $\frac{}{4\cdot 20}$. $\frac{7}{4}$.25 4 175

第 2 問

[解] $a>0$ …① $0\leq\theta\leq\pi/2$ …② 以下 $C=\cos\theta$, $S=\sin\theta$ と略記する。





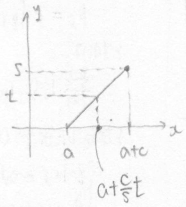
Sの対称性から、Sのうち $0\leq y$ の部分を y 軸のまわりに回転して出来る立体の体積 V' として、

$$V=2V' \qquad \cdots③$$

である。$y=t$ $(0\leq t\leq s)$ におけるSの切断面は右上図のようになる。Sは $x=a+c$ において、半径Sの円を形成しており、端点の座標は $y^2+z^2=s^2$ に $y=t$ を代入して

$$z=\pm\sqrt{s^2-t^2}$$

又、Sのうち xy 平面上にあって $y\geq0$ をみたすものは点 $(a,0,0)$ と $(a+c,s,0)$ を結ぶ線分であって、これと $y=t$ の交点は $(a+\frac{c}{s}t,t,0)$ である。



したがって、右上図から

$$\frac{V'}{\pi}=\int_0^s(\overline{OA}^2-\overline{OB}^2)dt$$

$$=\int_0^s\{(a+c)^2+s^2-t^2-(a+\frac{c}{s}t)^2\}dt$$

$$=\int_0^s\{-(1+\frac{c^2}{s^2})t^2-2a\frac{c}{s}t+c^2+s^2+2ac\}dt$$

$$=\int_0^s\{-\frac{1}{s^2}t^2-2a\frac{c}{s}t+1+2ac\}dt$$

$$=\left[-\frac{1}{3s^2}t^3-a\frac{c}{s}t^2+2act+t\right]_0^s$$

$$=+\frac{2}{3}s-acs+2acs=acs+\frac{2}{3}s$$

だから③に代入して

$$V=2\pi(a\cos\theta\sin\theta+\frac{2}{3}\sin\theta)\equiv f(\theta)$$ //(1)

(2) $a=4$ とすると、

$$f(\theta)=2\pi(4cs+\frac{2}{3}s)=\frac{4}{3}\pi(6cs+s)$$

$$f'(\theta)=\frac{4}{3}\pi(6\cos2\theta+c)=\frac{4}{3}\pi(12c^2+c-6)=\frac{4}{3}\pi(3c-2)(4c+3)$$

だから、② へ $\cos\theta_0=\frac{2}{3}$ をみたす θ_0 を用いて下表を得る。

θ	0		θ_0		$\pi/2$
c	1		2/3		0
f'		+	0	−	
f		↗		↘	

したがって、$c=\frac{2}{3}$ の時、$\max V=\frac{20}{9}\sqrt{5}\pi$ //

[別] (円錐の方程式を求めにいっても良い)

Sは円錐側面である。Sの方程式は $x=a+k$ と固定した時半径 $k\tan\theta$ の円が表われること から

$$y^2+z^2=(x-a)^2\tan^2\theta$$

である。

もしくは、S上の点 $P(x,y,z)$ に対し、$A(a,0,0)$ とおくと $\overrightarrow{AP}$ と x 軸のなす角 θ より、

$$\cos\theta=\frac{\begin{pmatrix}x-a\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}x-a\\y\\z\end{pmatrix}\right|\cdot1}$$

$$\cos\theta=\frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}}$$

今 $x-a>0$ であるから、2乗してセイリして

$$y^2+z^2=(x-a)^2\tan^2\theta$$

$y=t$ と固定すると

$$\tan^2\theta(x-a)^2-z^2=t^2$$

これは双曲線の一部 (以下略)

第 3 問

$p, n \in \mathbb{N}$とする。(前略)

(1) $p+1$次多項式があって.

[参考] －解2－

一般に. $\sum_{j=1}^{N} r_j S_j(n) = \sum_{j=1}^{N} r_j' S_j(n)$ ならば: $r_j = r_j'$ $(j=1,2,\cdots,N)$ である。…(*)

(最高次から順に比べればわかる)

(2) $n^q(n+1)^q = \sum_{k=1}^{n} \{k^q(k+1)^q - (k-1)^q \cdot k^q\} = \sum_{k=1}^{n} k^q \{(k+1)^q - (k-1)^q\}$

$= \sum_{k=1}^{n} k^q \left[\sum_{l=0}^{q} {}_qC_l \cdot k^l - \sum_{l=0}^{q} {}_qC_l k^l \cdot (-1)^{q-l} \right]$

$= \sum_{l=0}^{q} \{1-(-1)^{q-l}\} {}_qC_l \cdot S_{q+l}(n)$

だから

$$\sum_{j=1}^{q} a_j S_{2j-1}(n) = n^q(n+1)^q = \sum_{l=0}^{q} \{1-(-1)^{q-l}\} {}_qC_l \cdot S_{q+l}(n)$$

となり. (*)によって.

$$q+l = 2j-1 \Leftrightarrow l = 2j-q-1$$

に注意して.

$$a_j = \{1-(-1)^{q-(2j-q-1)}\} {}_qC_{2j-q-1} = 2\,{}_qC_{2j-q-1}$$

である。

(3) 与式が任意の$x=n \in \mathbb{N}$で成立すれば良い。

。$n^q(n+1)^{q-1} = \sum_{k=1}^{n} \{k^q(k+1)^q - (k-1)^q k^q\} = \sum_{k=0}^{q} \{{}_{q-1}C_{l-1} - (-1)^{q-l}\,{}_qC_l\} S_{q-1+l}(n)$

。$n^{q-1}(n+1)^{q-1} = \sum_{l=0}^{q-1} \{1-(-1)^{q-1-l}\} {}_{q-1}C_l \cdot S_{q-1+l}(n)$

だから、

$$\beta_l = c\{{}_{q-1}C_{l-1} - (-1)^{q-l}\,{}_qC_l\} + q\{1-(-1)^{q-1-l}\} {}_{q-1}C_l$$

とすれば.

$$\sum_{j=1}^{q-1} b_j S_{2j}(n) = \sum_{l=0}^{q} \beta_l S_{q-1+l}(n) \quad \cdots ①$$

となる。したがって. (*)から

$$\begin{cases} q-1+l \text{ が odd の時. } \beta_l = 0 \\ q-1+l = 2j \text{ の時 } b_j = \beta_l \end{cases}$$

となる条件をもとめれば良い。第1式から $c = 2q$ が定まり. 第2式から

$b_j = 2(2j+1)\,{}_qC_{2j-q+1}$ $(1 \leq j \leq q-1)$ となる。

第 3 問

[解] (1) 題意をpについての帰納法で示す。ここでは$p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$とする。まず$p=0$の時 $\sum_{k=1}^{n} k^0 = n$より、$S_0(x)=x$とすれば題意は成立する。そこで以下$l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$とし、$0 \leq p \leq l$の時に題意が成立すると仮定する。$\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^{l+2}-k^{l+2}\}$を2通りで表して、

$$\begin{aligned}(n+1)^{l+2}-1 &= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{t=0}^{l+1} {}_{l+2}C_t \cdot k^t\right)\\ &= \sum_{t=0}^{l+1} {}_{l+2}C_t \left(\sum_{k=1}^{n} k^t\right)\\ &= (l+2)\sum_{k=1}^{n} k^{l+1} + \sum_{t=0}^{l} {}_{l+2}C_t \cdot S_t(n)\end{aligned}$$

だから、

$$\sum_{k=1}^{n} k^{l+2} = \frac{1}{l+2}\left\{(n+1)^{l+2}-1-\sum_{t=0}^{l} {}_{l+2}C_t \cdot S_t(n)\right\} \quad \cdots ☆$$

この右辺を$S_{l+1}(n)$とおけば、仮定から$S_{l+1}(n)$は$l+2$次多項式で、$p=l+1$でも題意は成立。以上で示された。■

(2) $S_1(0)=0$及び☆から、帰納的に$S_p(0)=0$であるから、

$$\sum_{j=1}^{q} a_j S_{2j-1}(x) = x^q(x+1)^q \quad \cdots ①$$

は$x=0$で成立する。したがって、

"①がxに関する恒等式"

$\Leftrightarrow$ "階差をとった

$$\sum_{j=1}^{q} a_j\{S_{2j-1}(x)-S_{2j-1}(x-1)\} = x^q(x+1)^q - x^q(x-1)^q \quad \cdots ②$$

がxに関する恒等式。"

である。この両辺はxの多項式だから、②が2以上の自然数のときに成立することが必要十分である。この時、

$$S_{2j-1}(x)-S_{2j-1}(x-1) = x^{2j-1}$$

だから、②に代入して

$$\sum_{j=1}^{q} a_j x^{2j-1} = x^q\{(x+1)^q-(x-1)^q\} \quad \cdots ③$$

③の右辺を2項展開すると、

$$(x+1)^q-(x-1)^q = \sum_{k=0}^{q}\{1-(-1)^{q-k}\}\,{}_qC_k \cdot x^k$$

だから③で係数比較して、($2j-1=q+k \Leftrightarrow k=2j-q-1$)

$$a_j = 2\,{}_qC_{2j-q-1} \quad (k<0 \text{又は} k>n \text{のとき、} {}_nC_k=0 \text{とする})$$

//

(3) (2)と同じく、与式

$$\sum_{j=1}^{q-1} b_j \cdot S_{2j}(x) = x^{q-1}(x+1)^{q-1}(cx+q) \quad \cdots ④$$

は$x=0$で成立するから、④の階差をとった

$$\sum_{j=1}^{q-1} b_j\{S_{2j}(x)-S_{2j}(x-1)\} = x^{q-1}(x+1)^{q-1}(cx+q) - (x-1)^{q-1}x^{q-1}(c(x-1)+q)$$

$$\therefore \sum_{j=1}^{q-1} b_j \cdot x^{2j} = cx^{q-1}\{x(x+1)^{q-1}-(x-1)^q\} + q\,x^{q-1}\{(x+1)^{q-1}-(x-1)^{q-1}\} \quad \cdots ⑤$$

が2以上の自然数xで成立すれば良い。($\because x \in \mathbb{N}$の時、$S_{2j}(x)-S_{2j}(x-1)=x^{2j}$) ここで、

・$x(x+1)^{q-1}-(x-1)^q = x\sum_{k=0}^{q-1} {}_{q-1}C_k\, x^k - \sum_{k=0}^{q} {}_qC_k \cdot x^k \cdot (-1)^{q-k}$

$= \sum_{k=0}^{q}\{{}_{q-k}C_{k-1} - (-1)^{q-k} \cdot {}_qC_k\}x^k$

・$(x+1)^{q-1}-(x-1)^{q-1} = \sum_{k=0}^{q-1} {}_{q-1}C_k \cdot x^k - \sum_{k=0}^{q-1} {}_{q-1}C_k \cdot x^k(-1)^{q-1-k}$

$= \sum_{k=0}^{q}\{1-(-1)^{q-1-k}\}\,{}_{q-1}C_k \cdot x^k$

だから、⑤に代入して、

$$\sum_{j=0}^{q-1} b_j \cdot x^{2j} = \sum_{k=0}^{q}\left[c\{{}_{q-1}C_{k-1}-(-1)^{q-k}\,{}_qC_k\} + q\{1-(-1)^{q-1-k}\}\,{}_{q-1}C_k\right]x^{q-1+k} \quad \cdots ⑥$$

係数比較する。まず⑤を変形して

$$\sum_{j=0}^{q-1} b_j \cdot x^{2j} = x^{q-1}\left[c \cdot x\{(x+1)^{q-1}-(x-1)^{q-1}\} + q(x+1)^{q-1} + (c-q)(x-1)^{q-1}\right]$$

であり、右辺が偶数次の項のみから成るためには、$x\{(x+1)^{q-1}-(x-1)^{q-1}\}$の項に注目して、

$$q=c-q \quad \therefore \quad c=2q \quad \cdots ⑦$$

が必要。この時、⑥でn^{2j}の項を比べて、

$$\begin{aligned}b_j &= c\{{}_{q-1}C_{(2j-q+1)-1} - (-1)^{q-(2j-q+1)}\,{}_qC_{2j-q+1}\}\\ &\quad + q\{1-(-1)^{q-1-(2j-q+1)}\}\,{}_{q-1}C_{2j-q+1}\\ &= 2q({}_{q-1}C_{2j-q} + {}_qC_{2j-q+1}) \quad (\because ⑦)\\ &= 2\{(2j-q+1)\,{}_qC_{2j-q+1} + q\,{}_qC_{2j-q+1}\} \quad (\because q\,{}_{q-1}C_{2j-q} = (2j-q+1)\,{}_qC_{2j-q+1})\\ &= 2(2j+1)\,{}_qC_{2j-q+1}\end{aligned}$$

とすれば十分である。以上から、

$$\begin{cases} c=2q \\ b_j = 2(2j+1) \cdot {}_qC_{2j-q+1} \end{cases}$$

//

(4) $p=2r-1$ ($r \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$)として、$S'_{2r-1}(x) = (2r-1) \cdot S_{2r-2}(x) \quad \cdots ⑧$が成立することを$r$についての帰納法で示す。$r=2$の時は、$S'_3(x) = \left[\frac{1}{4}x^2(x+1)^2\right]' = \frac{1}{2}x(x+1)(2x+1) = 3S_2(x)$で成立するので、以下$q \geq 3$として、$2 \leq r \leq q-1$での⑧の成立をカテイする。(2)の両辺$x$で微分して

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{q} a_j \cdot S'_{2j-1}(x) = \left[x^q(x+1)^q\right]' = \sum_{j=1}^{q-1} b_j \cdot S_{2j}(x) \quad (\because (3))\\ \Leftrightarrow\ &\sum_{j=2}^{q-1} a_j \cdot S'_{2j-1}(x) + a_q \cdot S'_{2q-1}(x) = \sum_{j=1}^{q-2} b_j \cdot S_{2j}(x) + b_{q-1}S_{2q-2}(x) \quad (\because a_1=0)\\ \Leftrightarrow\ &a_q S'_{2q-1}(x) = b_{q-1}S_{2q-2}(x) \quad (\because \text{仮定及び } b_{j-1}=(2j-1)a_j)\\ \Leftrightarrow\ &S'_{2q-1}(x) = (2q-1) \cdot S_{2q-2}(x) \quad (\because q \geq 3 \text{より、} a_q = 2\,{}_qC_{q-1} \neq 0)\end{aligned}$$

だから、$r=q$の時も⑧は成立する。よって示された■