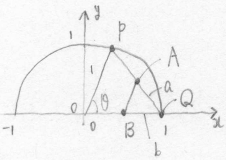
第 1 問

[解] (1) $c=\cos\frac{\theta}{2}$, $s=\sin\frac{\theta}{2}$とおく。



$$\overline{PQ}^2=(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta=4s^2$$

$0<\theta<\pi$で$s>0$だから$\overline{PQ}=2s$だから題意から、

$ab=s$である∎

(2) $B(1-b,0)$である。$\overrightarrow{QA}=\frac{a}{2\sin\frac{\theta}{2}}\begin{pmatrix}\cos\theta-1\\ \sin\theta\end{pmatrix}=\frac{a}{2\sin\frac{\theta}{2}}\begin{pmatrix}-2\sin^2\frac{\theta}{2}\\ 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}-s\\ c\end{pmatrix}$から、

$A(1-as,ac)$だから

$$\overline{AB}^2=\{(1-as)-(1-b)\}^2+(ac)^2=a^2+b^2-2abs \quad \cdots ①$$

となる。$t=a+b$とおく。(1)及び①から、

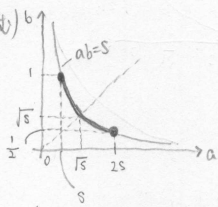
$$\overline{AB}^2=t^2-2s(1+s) \quad \cdots ②$$

ここで$0\leq a\leq 2s$, $0\leq b\leq 1 \cdots ③$に注意する。

1° $\overline{PQ}\geq\frac{1}{2}\iff s\geq\frac{1}{4}$の時

(a,b)の存在範囲は右図太線部(境界含む)だから$a+b=t$の存在範囲は、

$$2\sqrt{s}\leq t\leq 2s+\tfrac{1}{2} \quad \cdots ④$$



だから、②及び④から、

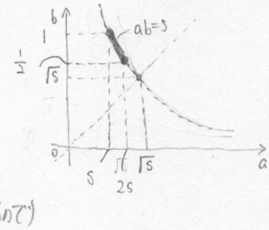
$$2s-2s^2\leq\overline{AB}^2\leq 2s^2+2s+\tfrac{1}{4} \quad \cdots ⑤$$

$(a,b)=(2s,\frac{1}{2})$の時 $t=2s+\frac{1}{2}$
$(a,b)=(s,1)$の時 $t=s+1$
$(a,b)=(\sqrt{s},\sqrt{s})$の時 $t=2\sqrt{s}$

2° $\overline{PQ}\leq\frac{1}{2}\iff s\leq\frac{1}{4}$の時

(a,b)の存在範囲は右下図太線部(境界含む)。だから、1°と同じく、

$$2s+\tfrac{1}{2}\leq t\leq s+1 \quad \cdots ⑥$$



だから、⑥及び②から

$$2s^2+\tfrac{1}{4}\leq\overline{AB}^2\leq -s^2+1$$

以上⑤⑦から、(⑤⑦ではいずれも等号が成立しうるので)

$\overline{PQ}\geq\frac{1}{2}$の時、$f(\theta)=2\sin\frac{\theta}{2}-2\sin^2\frac{\theta}{2}$ $(\sin\frac{\theta}{2}\geq\frac{1}{4})$ $(\equiv g(\theta))$
$\overline{PQ}\leq\frac{1}{2}$の時、$f(\theta)=2\sin^2\frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}$ $(\sin\frac{\theta}{2}\leq\frac{1}{4})$ $(\equiv h(\theta))$ //

(3) $y=g(\theta)$, $y=h(\theta)$は全区間で微分可能だから、$0<\alpha<\pi/2$かつ$\sin\alpha=\frac{1}{4}$をみたすαに対し、$\theta=2\alpha$での微分可能性を示せば良い。

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(2\alpha+h)-f(2\alpha)}{h}=g'(2\alpha)=\frac{1}{2}\cos\alpha$$
$$\lim_{h\to+0}\frac{f(2\alpha)-f(2\alpha-h)}{-h}=h'(2\alpha)=\frac{1}{2}\cos\alpha$$

から、左右極限が一致し、さらに$g(2\alpha)=h(2\alpha)$であるから、微分可能である∎

ここで$p=\sin\frac{\theta}{2}$とおくと、(2)から

$$f(\theta)=\begin{cases}2p-2p^2 & (\frac{1}{4}\leq p<1)\\ 2p^2+\frac{1}{4} & (0<p\leq\frac{1}{4})\end{cases}$$

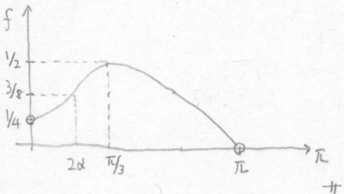
である。

$$\frac{d}{dp}f=\begin{cases}2(1-2p) & (\frac{1}{4}\leq p<1)\\ 4p & (0<p\leq\frac{1}{4})\end{cases}$$

から、下表を得る。

θ	0		2α		π/3		π
p	0		1/4		1/2		1
f'		+	+	+	0	−	
f	(1/4)	↗	↗	↗	1/2	↘	(0)

したがって、グラフは下図で、最大値は$\frac{1}{2}$ //



//

[別(2)]

(2) $\angle PQO=\frac{\pi-\theta}{2}$だから△ABQに余弦定理を用いて、

$$f(\theta)=a^2+b^2-2ab\cos\frac{\pi-\theta}{2}=a^2+b^2-2sab$$

を得る。(以下略)

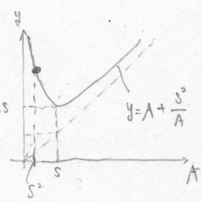
(2) (①以下)

bを消去する。$0<a<2s$, $0<b<1$から、$b=\frac{s}{a}$より

$$\begin{cases}\overline{AB}^2=a^2+\frac{s^2}{a^2}-2s^2 & \cdots *\\ 0<\frac{s}{a}<1\end{cases}$$

から、$s<a<2s \cdots ⑦$のもとでの*のminをもとめれば良い。

$y=A+\frac{s^2}{A}$のグラフは右図だから$4s^2$とsの大小によって場合分け。



1° $4s^2\geq 2s$ ∴ $s\geq\frac{1}{4}$

$f(\theta)=2s-2s^2$ ($a=\sqrt{s}$でmin)

2° $4s^2\leq s$ ∴ $s\leq\frac{1}{4}$

$f(\theta)=(4s^2+\frac{1}{4})-2s^2=2s^2+\frac{1}{4}$ ($a=2s$でmin)

(以下略)

第2問

[解] $n \in \mathbb{N}$ とおく

(1) $2 \leq n \leq r-1$ をみたす n に対し，第 n ラウンドまでゲームの続く確率 $P_1(n)$ は，$n-1$ 回目までで，$1 \leq x \leq k$ をみたす x のみが出る確率で，

$$P_1(n) = \left(\frac{k}{10}\right)^{n-1} \quad (n=1 \text{ の時もこれで良い})$$

したがって，第 n ラウンドで終了する時の期待値 $E_1(n)$ は

$$E_1(n) = P_1(n) \cdot \left(\frac{k+1}{10} + \cdots + \frac{10}{10}\right) = \frac{1}{20}(k+11)(10-k)P_1(n)$$

だから，第 r ラウンドのことも加味して，もとめる期待値 $E(1)$ は，

$$E(1) = \sum_{n=1}^{r-1} E_1(n) + \left(\frac{k}{10}\right)^{r-1} \cdot \frac{1}{10}(1+\cdots+10)$$

$$= \frac{1}{20}(k+11)(10-k)\frac{1-(k/10)^{r-1}}{1-k/10} + \frac{11}{2}\left(\frac{k}{10}\right)^{r-1}$$

$$= \frac{k+11}{2}\left\{1-(k/10)^{r-1}\right\} + \frac{11}{2}\left(\frac{k}{10}\right)^{r-1}$$

$$= \frac{k+11}{2} - \frac{k}{2}\left(\frac{k}{10}\right)^{r-1}$$ //

[補題] 得点の期待値を最大にする戦略は (1) の形の関数 $f_k(x)$ で与えられる

(証明) $1 \leq n \leq 9$ とし，$f(x) = 1 \ (x=n)$，$0 \ (x=n+1)$ だと仮定する．この戦略をとるラウンドを $p \ (1 \leq p \leq r-1)$ とし，このラウンドが行われる確率 A とすると，この時の期待値 E_n は，n に無関係な定数 B (p ラウンドで $n, n+1$ 以外が出る，又は p ラウンドが行われない時の期待値) C (p ラウンドで n が出る確率) D (p ラウンドで $n+1$ が出る時の期待値) を用いて

$$E_n = B + D + nC$$

と表される．一方，$f(x) = 0 \ (x=n+1)$，$1 \ (x=n)$ だとすると同様に

$$E_{n+1} = B + D + (n+1)C$$

と表される．$C > 0$ だから $E_{n+1} > E_n$．したがって，$f(1), f(2), \cdots$ を書き下した時，"1, 0" という配列があれば，それを入れかえることにより期待値を大きくできる．これをくり返すことにより [補題] は示された □

(2) [補題] と (1) から，$r=2$ の時，期待値の最大値は

$$E = \frac{k+11}{2} - \frac{k^2}{20} = \frac{1}{20}\left[-k^2 + 10k + 110\right] = \frac{1}{20}\left(-(k-5)^2 + 135\right)$$

の形であたえられる．ただし，k は (1) で用いられた数である．この最大値は $k=5$ の時の $\frac{135}{20} = \frac{27}{4}$ である．

戦略：$f_5(x)$，期待値：$\frac{27}{4}$ //

(3) $r=1$ の時 $f_k(x)$ を採用するとする．(2) から $r=2$ の時は $f_5(x)$ を採用すれば良く，この時期待値 E は

$$E = \frac{1}{10}((k+1)+\cdots+10) + \frac{k}{10} \cdot \frac{27}{4}$$

$$= \frac{1}{20}(k+11)(10-k) + \frac{27}{40}k$$

$$= \frac{1}{20}\left[-k^2 + \frac{25}{2}k + 110\right]$$

$$= \frac{1}{20}\left[-\left(k-\frac{25}{4}\right)^2 + \frac{625}{16} + 110\right]$$

これを最大にする k は $k=6$ で，この時 $E = \frac{149}{20}$

$$\begin{cases} \text{戦略：} r=1 \text{ の時 } f_6(x),\ r=2 \text{ の時 } f_5(x) \\ \text{期待値：} \frac{149}{20} \end{cases}$$ //

第 3 問

▷特殊方程式の解き

① 相反方程式
- 偶数次なら $\frac{n}{2}$ 乗の x でわる
- 奇数次なら、$x=1$ で因分してからわる

② n乗形方程式　$(x-□)^n = k$ の形をめざす（2項係数に注~

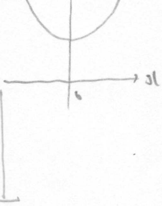
さらに、適当なおきかえ $t=kx$ によって、この形にならないかタメすことにカチがあるかもしれない。

▷$\sqrt{\ }$ を含む関数の正負について.

- 基本は"正負のわかる部分に分ける→2乗して $\sqrt{\ }$ をはずしにいく"
  だが正負がキワドイ（$\sqrt{\ }-\sqrt{\ }$ とか）でも、連続なので
  1つの値でためしておけば良い（けさん後、どっちが正かわからないとき）
- 同じ部分を含んでいたり、対称らしい形、あるいは関数の和差で
  表される時.
  - ＊同じ部分を文字でおいて、変形する.
  - ＊関数の増減をかんがえる

たとえば今回ならば、$f(x)=\sqrt{4-x^2}-\sqrt{1-x^2}$ とおくと

$$f(x)=\frac{3}{\sqrt{4-x^2}+\sqrt{1-x^2}}$$　（大切な変形!）



コレと偶関数だから、グラフは右のようになって、
$-\frac{1}{2}\leq a\leq 0$, $0\leq a\leq 1$ の時を処理できる

$\boxed{\text{このように、関数でみると増減の細部がわかる}}$

第 3 問

[解]

(1) $S_a = \begin{cases} 2\int_a^{a+1}\sqrt{4-x^2}\,dx - 2\int_a^{a+1}\sqrt{1-x^2}\,dx & (-\frac{1}{2}\le a\le 0) \\ 2\int_a^{a+1}\sqrt{4-x^2}\,dx - 2\int_a^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx & (0\le a\le 1) \\ 2\int_a^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx & (1\le a\le 2) \end{cases}$ //

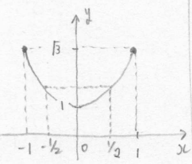
(2) $S(a)$は連続的に変化するので.区間内で$S(a)$は微分可能である。

$$S'(a) = \begin{cases} 2\sqrt{4-(a+1)^2} - 2\sqrt{4-a^2} - 2\sqrt{1-(a+1)^2} + 2\sqrt{1-a^2} & (-\frac{1}{2}\le a\le 0) \\ 2\sqrt{4-(a+1)^2} - 2\sqrt{4-a^2} + 2\sqrt{1-a^2} & (0\le a\le 1) \\ -2\sqrt{4-a^2} & (1\le a\le 2) \end{cases}$$ //

(3) $f(x) = \sqrt{4-x^2} - \sqrt{1-x^2}$ とおく。

$$f(x) = \frac{3}{\sqrt{4-x^2}+\sqrt{1-x^2}}$$

である。$1\le a\le 2$の時.$S'(a)\le 0$だから、$-\frac{1}{2}\le a\le 1$で考えれば良い。$y=f(x)$のグラフは.対称性と$0\le x$で単調増加であることから、右図.したがって.



$-\frac{1}{2}\le x\le 0$の時.

$$f(x+1) - f(x) \ge 0$$

つまり、$-\frac{1}{2}\le a\le 0$の時$\frac{1}{2}S'(a) = f(a+1) - f(a) \ge 0$だから.$[-\frac{1}{2}, 1]$で$S(a)$は単調増加 …① 。最後に$0\le a\le 1$の時をかんがえる。

$$\frac{1}{2}S'(a) = \sqrt{4-(a+1)^2} - f(a)$$

で.この時.$\sqrt{4-(a+1)^2}$, $-f(x)$は共に単調減少だから.$S'(a)$も単調減少。これと、

$S'(1) = -2\sqrt{3} < 0$, $S'(0) = 2(\sqrt{3}-1) > 0$ から.$S'(a_0)=0$ なるa_0が唯1つあって.下表を得る。

a	$-\frac{1}{2}$		0		a_0		1		2
S'	0	+	+	+	0	−	−	−	0
S		↗	↗	↗		↘	↘	↘	

よって.$a=a_0$で最大であるから.これをみたす4次式をつくれば良い。$S'(a_0)=0$から、

$$\sqrt{4-(a+1)^2} = \sqrt{4-a^2} - \sqrt{1-a^2}$$

両辺0以上から2乗して良く,

$$4-(a+1)^2 = 5-2a^2 - 2\sqrt{(1-a^2)(4-a^2)}$$

$$2\sqrt{(1-a^2)(4-a^2)} = -a^2+2a+2$$

$0\le a\le 1$の時.$-a^2+2a+2>0$ だから.両辺0以上だから2乗して.

$$4(1-a^2)(4-a^2) = (-a^2+2a+2)^2 = a^4+4a^2+4+2(-2a^3+4a-2a^2)$$

$$4(a^4-5a^2+4) = a^4-4a^3+8a+4$$

aとxを入れかえて

$$3x^4+4x^3-20x^2-8x+12=0$$ //

(4) $x=\sqrt{2}t$として代入

$$12t^4+8\sqrt{2}t^3-40t^2-8\sqrt{2}t+12=0 \quad \cdots ②$$

$z=t-1/t$ とおく。②で$t=0$は解でないので.両辺t^2でわって.

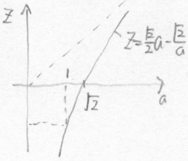
$$12(t^2+1/t^2)+8\sqrt{2}(t-1/t)-40=0$$

$$12(z^2+2)+8\sqrt{2}z-40=0$$

$$3z^2+2\sqrt{2}z-4=0$$ //

(5) (4)の解は $z=\frac{1}{3}(-\sqrt{2}\pm\sqrt{14})$ …③ である。$t=\sqrt{2}x$及び$z=t-1/t$から.

$z=\frac{\sqrt{2}}{2}a-\frac{\sqrt{2}}{a}$ であり、$0<a<1$及び右のグラフから.$z<0$だから.



③で複号負を採用して.

$$\frac{1}{3}(-\sqrt{2}-\sqrt{14}) = \frac{\sqrt{2}}{2}a-\frac{\sqrt{2}}{a}$$

両辺aをかけて.

$$\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{3}(1+\sqrt{7})a-1=0$$

$$a = -\frac{1}{3}(1+\sqrt{7}) \pm \sqrt{\frac{1}{9}(26+2\sqrt{7})}$$

$a>0$から.複号正を採用して.

$$a_0 = -\frac{1}{3}(1+\sqrt{7}) + \frac{1}{3}\sqrt{26+2\sqrt{7}}$$ //