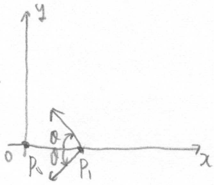
第 1 問

[解] y軸をIm軸，x軸をRe軸とする複素平面で考え，$\overrightarrow{P_nP_{n+1}}$ を表す複素数を α_nと表し，$e(\theta)=c+is$ $(c=\cos\theta, s=\sin\theta)$とおく。



すると実数数列 a_n $(a_n\geqq 0)$と θ_nがあって

$$\alpha_n = a_n e(\theta_n) \quad \cdots ①$$

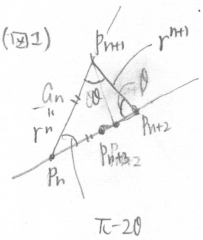
と表すことが出来る。(a)から

$$a_{n+1} = r a_n$$

及び $a_0=1$から等比数列の公式から

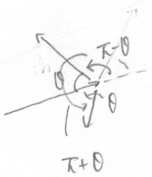
$$a_n = r^n \quad \cdots ②$$

(図1)



又(b)及び(c)から $\triangle P_nP_{n+1}P_{n+2}$は(図1)のようになって $\overrightarrow{P_{n+1}P_{n+2}}$ を2通りで表して

$$r^{n+1} = 2r^n\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = 2r^n\cos\theta$$



$r\neq 0$ より

$$r = 2\cos\theta \quad /\!/ \ (1)$$

又，この図から $\overrightarrow{P_nP_{n+1}}$ から $\overrightarrow{P_{n+1}P_{n+2}}$ へは常に一定の方向に θだけ回転しているから θ_nは以下のいずれか一方をみたす。

$$\begin{cases} \theta_{n+1} = \theta_n + (\pi-\theta) & \cdots ㋐ \\ \theta_{n+1} = \theta_n + (\pi+\theta) & \cdots ㋑ \end{cases}$$

$\theta_0=0$ だから

$$\begin{cases} ㋐の時\ \theta_n = n(\pi-\theta) \\ ㋑の時\ \theta_n = n(\pi+\theta) \end{cases}$$

以上から，①より

$$\alpha_n = \begin{cases} r^n e(n\pi-n\theta) = r^n e^n(\pi-\theta) & (㋐) \\ r^n e(n\pi+n\theta) = r^n e^n(\pi+\theta) & (㋑) \end{cases}$$

したがって，P_nの表す点の複素数 z_nとして

$$z_n = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_n$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1-r^ne^n(\pi-\theta)}{1-re(\pi-\theta)} & (㋐) \\ \dfrac{1-r^ne^n(\pi+\theta)}{1-re(\pi+\theta)} & (㋑) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1-(2\cos\theta)^n(-\cos\theta+i\sin\theta)^n}{1-2\cos\theta(-\cos\theta+i\sin\theta)} & (㋐) \\ \dfrac{1-(2\cos\theta)^n(\cos\theta+i\sin\theta)^n}{1+2\cos\theta(\cos\theta+i\sin\theta)} & (㋑) \end{cases} \quad /\!/ \ (2)$$

(3) z_nが収束する必要十分条件は，㋐，㋑いずれにおいても

$$0 < 2\cos\theta < 1$$

$$\therefore \frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2} \quad 答$$

(4) (3)の時

$$z_n \xrightarrow{n\to\infty} \begin{cases} \dfrac{1}{1+2c^2-2isc} \\ \dfrac{1}{1+2c^2+2isc} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1+2c^2+2isc}{(1+2c^2)^2+(2sc)^2} \\ \dfrac{1+2c^2-2isc}{(1+2c^2)^2+(2sc)^2} \end{cases}$$

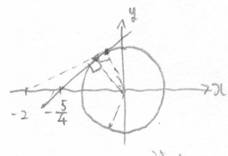
だから

$$\alpha(\theta) = \frac{\cos2\theta+2}{(\cos2\theta+2)^2+\sin^2 2\theta} = \frac{2+\cos2\theta}{5+4\cos2\theta} \longrightarrow \frac{1}{2} \quad /\!/ \quad (\theta\to\pi/3+0)$$

$$\beta(\theta) = \frac{\pm\sin2\theta}{(\cos2\theta+2)^2+\sin^2 2\theta} = \frac{\pm\sin2\theta}{5+4\cos2\theta} \longrightarrow \pm\frac{\sqrt{3}}{6} \quad /\!/$$

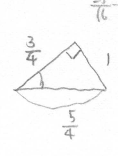
(5) $\beta(\theta)$の複号正を $f(\theta)$とおく。$f(\theta)$は $\dfrac{1}{4}\dfrac{\sin2\theta}{\underset{\sim\sim\sim}{\frac{5}{4}+\cos2\theta}}$ で～部は単位円上の点 $(\cos2\theta, \sin2\theta)$ $\left(\frac{2}{3}\pi < 2\theta < \pi\right)$ と $\left(-\frac{5}{4}, 0\right)$ とのカタムキを表すから

$$0 < k \leqq \frac{4}{3}$$



より，$|\beta(\theta)| \leqq \dfrac{1}{3}$ で

(5) $\begin{cases} 複号正の時\ \frac{1}{3} \\ 〃\ 負の時，なし \end{cases}$ $/\!/$



第 2 問

[解] $A=\{k \mid k=0,1,\cdots,7\}$, $B=\{0,1\}$, $N\in\mathbb{N}_{\geq 3}$

(1) Aの1つの要素に対し, 0,1 の2通りの写像のつくり方があるから, 2^7通り //

(2)
$$\begin{cases} b_1=f(a_1) \\ b_2=f(2a_1+a_2) \\ b_{k+2}=f(4a_k+2a_{k+1}+a_{k+2}) \quad (k=1,2,\cdots,N-2) \end{cases} \quad \cdots (*)$$

$b_k=\begin{cases}0 & (k\in \text{odd}) \\ 1 & (k\in \text{even})\end{cases}$ なる数列を(*)によって与えるような$\{a_n\}$をもとめる。

$k=1,2$での成立が必要だから,

$a_1=0,3,4,7$ $\quad 2a_1+a_2=1,2,5,6$

これをみたす (a_1,a_2) は, $(a_1,a_2)=(0,1)$ …① のみである。$k\geq 3$の時,

○$k=2n$ ($n\in\mathbb{N}_{\geq 2}$) ならば $4a_{2n}+2a_{2n+1}+a_{2n+2}=1,2,5,6$ …②

○$k=2n-1$ ($n\in\mathbb{N}_{\geq 2}$) ならば $4a_{2n-1}+2a_{2n}+a_{2n+1}=0,3,4,7$ …③

をみたす。②−③×2より

$a_{2n+2}-8a_{2n-1}=(1,2,5,6)-(0,6,8,14)$ (()内の1つをえらび, 演算を行う)

$a_k=0,1$だから, $a_{2n+2}-8a_{2n-1}$は$0,-8,1,-7$しかとりえないので,

$a_{2n+2}-8a_{2n-1}=1-0,\ 1-8,\ 6-6,\ 6-14$ …④

②③から $a_3=1$, $a_4=0$であり, 以下帰納的に $a_n=0$ ($n\equiv 0,1$) $a_n=1$ ($n\equiv 2,3$) (mod 4) であることを示す. $n=1\sim 4$の時は成立するから, 以下 $n=4m-3\sim 4m$ ($m\in\mathbb{N}$) での成立を仮定し, $n=4m+1,\cdots,4m+4$での成立を示す. ②③から

$a_{4m+1}=(0,3,4,7)-0-4=0$ (∵ $a_{4m+1}=0,1$)

$a_{4m+2}=(1,2,5,6)-0-0=1$ (∵ $a_{4m+2}=0,1$)

$a_{4m+3}=(0,3,4,7)-2-0=1$ 〃

$a_{4m+4}=(1,2,5,6)-2-4=0$ 〃

となり, たしかに成立する。以上から示された□

したがって法を4として

$a_n=\begin{cases}0 & (n\equiv 0,1) \\ 1 & (n\equiv 2,3)\end{cases}$ //

(3) Bの要素は2つだけだから, 各mに対し, $f(2m)$, $f(2m+1)$の定め方は2通りであるから, $2^4=16$ //

(4) Nについての帰納法で示す. $N=1$での成立は明らかだから, 以下$N=k\in\mathbb{N}$での成立を仮定し, $N=k+1$での成立を示す。(*)及び仮定から, 1からk項目までの01数列は任意に作ることができる。そこで$k+1$項目について, $b_{k+1}=f(4a_{k-1}+2a_k+a_{k+1})$より, $4a_{k-1}+2a_k+a_{k+1}$の偶奇はa_{k+1}のそれと一致し, 偶数も奇数もとることが出来るので, (P)とあわせて, $k+1$項目は1も0も作ることができる。以上から$N=k+1$でも題意は成立. 以上から示された□

-4

$f(\text{odd})=$ $\quad -2\ -4\ -6$

$a_2=$

$a_4=0$

$a_1=0$ $\quad a_5=0$

$a_2=1$ $\quad a_6=1$

$a_3=1$

$4a_3+2=0,3,4,7$

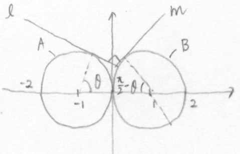
$a_7=$

0
1
1
0
0
1
1
0

第 3 問

第 3 問

[解] $C=\cos\theta$, $S=\sin\theta$ とする。



(1) $m \perp l$ から、m は B上の点 $(1+\cos(\frac{\pi}{2}+\theta), \sin(\frac{\pi}{2}+\theta))$、又は $(1+\cos(\theta-\pi/2), \sin(\theta-\pi/2))$ での接線である。順に m_1, m_2 とすると、

$$\begin{cases} m_1 : \cos(\theta+\pi/2)(x-1)+\sin(\theta+\pi/2)=1 \\ m_2 : \cos(\theta-\pi/2)(x-1)+\sin(\theta-\pi/2)=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 : -S(x-1)+Cy=1 \\ m_2 : S(x-1)-Cy=1 \end{cases}$$

これと l の交点をもとめて、順に、

$$\begin{cases} m_1 \text{と} l : (S^2-C^2-S+C,\ -(2C-1)S+C) \\ m_2 \text{と} l : (S^2-C^2+S+C,\ -(2C-1)S-C) \end{cases}$$

//

(2) m_1 と l の交点 P とする。題意のうち、$y \geq 0$ の部分は、A, B, P のキセキで囲まれた部分で、この体積 V_1 として、もとめる体積 V は、対称性から

$$V = 2V_1 + 2\pi \quad \cdots ①$$

である。$P(X, Y)$ とすると (1) から

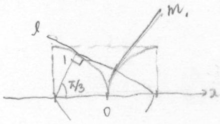
$$\begin{cases} X = S^2-C^2-(S-C) \\ Y = (S+C)-2SC \end{cases}$$

だから、

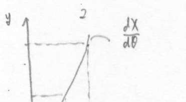
$$\begin{cases} \dfrac{dX}{d\theta} = 4SC-(C+S) = 2t^2-t-2 \quad (t=C+S) \\ \dfrac{dY}{d\theta} = (C-S)-2(C^2-S^2) = (C-S)\{1-2(S+C)\} \end{cases}$$

を得る。P が B上の点と一致する時、l が B の中心 $(1, 0)$ を通り、この時 $\theta=\frac{\pi}{3}$ である。

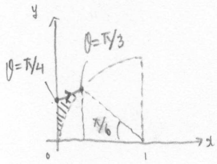
又、P が y 軸上にある時 $X=0$ で、$\theta=\pi/4$ である。対称性から $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \pi/3$ で考える。この時、下表を得る。



θ	$\pi/4$		$\pi/3$
X'	+	+	+
Y'	+	+	+
(X, Y)	$(0, \sqrt{2}-1)$	↗	$(\frac{2-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$



したがって、P の描く形は右下図。斜線部の面積は、対称性から $\frac{1}{2}V_1$ にひとしく、



$$\frac{1}{2}V_1 = \quad - \quad \cdots ②$$

となる。

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/3} Y \frac{dX}{d\theta} d\theta$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \{(S+C)-2SC\}\{4SC-(C+S)\} d\theta$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \left[-(S+C)^2+6SC(S+C)-8S^2C^2\right] d\theta$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \{(6SC^2+6CS^2)-(2SC+8S^2C^2)-1\} d\theta \quad \cdots ③$$

だから、各項計算して、

- $\int_{\pi/4}^{\pi/3} 6(SC^2+CS^2)d\theta = 6\cdot\left[-\frac{1}{3}C^3+\frac{1}{3}S^3\right]_{\pi/4}^{\pi/3} = 2\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}-\frac{1}{8}\right) = \frac{3\sqrt{3}-1}{4}$
- $\int_{\pi/4}^{\pi/3} 2SC\,d\theta = -\frac{1}{2}\left[\cos 2\theta\right]_{\pi/4}^{\pi/3} = \frac{1}{4}$
- $\int_{\pi/4}^{\pi/2} 8S^2C^2 d\theta = \int_{\pi/4}^{\pi/3} 2\sin^2 2\theta\, d\theta = \left[\theta-\frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_{\pi/4}^{\pi/3} = \frac{\pi}{12}+\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\int_{\pi/4}^{\pi/3} d\theta = \frac{\pi}{12}$

③に代入して

$$= \frac{3\sqrt{3}-1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{12}$$

$$= \frac{5}{8}\sqrt{3} - \frac{1}{2} - \frac{\pi}{6}$$

又、

$$= \quad - $$

$$= \frac{1}{2}\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{12}\pi - \frac{\sqrt{3}}{8}$$

だから、②に代入して

③、④を②に代入して、

$$\frac{1}{2}V_1 = \frac{3}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\pi$$

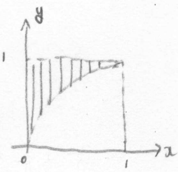
だから、①より

$$V = 3\sqrt{3}-2-\pi+2\pi = 3\sqrt{3}+\pi-2$$

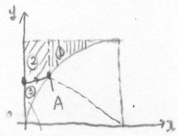
//

[注] (非通過領域についての論述)

- 対称性から第1象限で考える。右図の部分のみ考えれば良い。
- P の軌跡は [解] での考察から右下図のようになる。

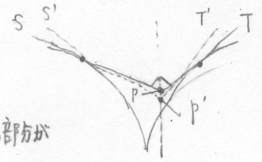


①の部分は正方形を、A で接するようにした状態から平行移動して通過しうる。



②の部分も同様

③の部分は、右下図で P, P' (x 座標が同じ) に対し、A, B へ接線を引き S, S', T, T' を定めると、



$$\angle S'P'T' < \angle SPT = \pi/2$$

となるので、P' は通りえない。

又、正方形の一辺が 2 であることとあわせて、[解] の部分が非通過領域である。