T大こうき 2003

第 1 問

[解] (1) $f(x)=\sin x-\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)$, $g(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\sin x$ とおくと、

$0\leq x$ で $f(x), g(x)\geq 0$ を示せば良い。以下 $x\geq 0$ とする。

$$f'(x)=\cos x-1+\frac{1}{2}x^2 \quad f''(x)=-\sin x+x\geq 0$$

より、$f'(x)$ は単調増加で $f'(x)\geq f'(0)=0$。したがって $f(x)$ も単調増加で

$$f(x)\geq f(0)=0 \quad \cdots ①$$

$$g'(x)=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{x^4}{24}-\cos x,$$

$$g''(x)=-x+\frac{1}{6}x^3+\sin x=f(x)\geq 0$$

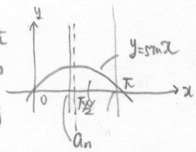
同じく、$g'(x)\geq g'(0)=0$, $g(x)\geq g(0)=0 \quad \cdots ②$

以上①、②から示された。

(2) 立体の体積 V とすると

$$V=\int_0^{\pi}\pi(\sin x)^2dx=\pi\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{2}\pi^2 \quad \cdots ③$$



(a) 題意の解及び $y=\sin x$ が $x=\pi/2$ を軸に対称なことから、$x=a_n$ から $x=\pi/2$ までが1つの部分であり、

$$\pi\int_{a_n}^{\pi/2}(\sin x)^2dx=\frac{1}{2n}V \quad \cdots ④$$

平均値の定理から、$a_n<c<\pi/2$ をみたす c で

$$=\pi(\pi/2-a_n)\sin^2 c$$

をみたすものが存在する。④に代入して

$$n(\pi/2-a_n)=\frac{V}{2}\frac{1}{\pi\sin^2 c}=\frac{1}{4}\pi/\sin^2 c \quad (\because ③)$$

$a_n\to\pi/2$ $(n\to\infty)$ 及びはさみうちの定理から、$n\to\infty$ では $c\to\pi/2$ だから、

$$n(\pi/2-a_n)\longrightarrow\frac{1}{4}\pi$$

//

(b) 題意より、

$$\pi\int_0^{b_n}(\sin x)^2dx=\frac{1}{2n}V$$

$$\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{b_n}=\frac{1}{2\pi n}V$$

$$\frac{1}{2}b_n-\frac{1}{4}\sin 2b_n=\frac{1}{4}\frac{\pi}{n} \quad \cdots ⑤$$

$b_n\geq 0$ 及び (1) から、x に $2b_n$ を代入して、

$$2b_n-\frac{4}{3}b_n^3\leq\sin 2b_n\leq 2b_n-\frac{4}{3}b_n^3+\frac{4}{15}b_n^5 \quad \cdots ⑥$$

⑥及び⑤から、

$$\frac{1}{3}b_n^3-\frac{1}{15}b_n^5\leq\frac{1}{4}\frac{\pi}{n}\leq\frac{1}{3}b_n^3$$

$n>0$ より

$$\left(\frac{3}{4}\pi\right)^{\frac{1}{3}}\cdot n^{p-\frac{1}{3}}\leq n^p\cdot b_n\leq\left(\frac{3}{4}\frac{\pi}{1-\frac{1}{5}b_n^2}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot n^{p-\frac{1}{3}} \quad \cdots ⑦$$

ア：$p<\frac{1}{3}$ の時

⑦の(左辺)、右辺共に0に収束するから ($\because 0<b_n<\pi/2$) はさみうちより

$n^p\cdot b_n\longrightarrow 0$

イ：$p>\frac{1}{3}$ の時

⑦の左辺が発散し、$n^p\cdot b_n\longrightarrow\infty$

ウ：$p=\frac{1}{3}$ の時

$n\to\infty$ で $b_n\to 0$ だから、⑦の両辺共に $\left(\frac{3}{4}\pi\right)^{\frac{1}{3}}$ に収束

以上から

$$p=\frac{1}{3},\quad n^{\frac{1}{3}}\cdot b_n\longrightarrow\left(\frac{3}{4}\pi\right)^{\frac{1}{3}}$$

//

$$\frac{b_n^3}{3}\left(1-\frac{1}{5}b_n^2\right)\leq\frac{1}{4}\frac{\pi}{n}$$

$$b_n^3\leq\left(\frac{3}{4}\frac{\pi}{n\left(1-\frac{1}{5}b_n^2\right)}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\left(\frac{3}{4}\frac{\pi}{\left(1-\frac{1}{5}b_n^2\right)}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot n^{p-\frac{1}{3}}$$

第　　問

▷ (2)のことをかんがえると，$(\sqrt{p}-[\sqrt{p}])^l = A\sqrt{p}+B$において，A，Bの動きがわかりやすい方が良い。そこで共役の式を思い出して，$([\sqrt{p}]-\sqrt{p})^l = -A\sqrt{p}+B$とすれば，A，Bが単調に増加してくれる。

☆ A－Bの評価で，$A \approx B$の時は分母の有理化をすること。

第 2 問

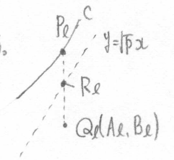
[解] (1) $[\sqrt{p}] = t$ とおく ($t\in\mathbb{N}$) と, $\sqrt{p}-1 < t \le \sqrt{p}$ …① である. 以下
$(-1)^l(t-\sqrt{p})^l = (-1)^l(B_l - \sqrt{p}A_l)$ をみたす $A_l, B_l \in \mathbb{Z}$ があることを帰納的に示す。

$l=1$ の時 $A_1=1, B_1=t$ とすれば良い。$l=k$ での ($k\in\mathbb{N}$) 成立を仮定すると
$$(t-\sqrt{p})^{k+1} = (B_k-\sqrt{p}A_k)(t-\sqrt{p}) = (pA_k+tB_k)-\sqrt{p}(tA_k+B_k)$$
から. $A_{k+1} = tA_k+B_k \in \mathbb{Z}$, $B_{k+1} = pA_k+tB_k \in \mathbb{Z}$ …② とすれば良く, $l=k+1$ でも成立。以上から. 帰納的に※が示された。よって
$$A = (-1)^{l+1}A_l,\quad B = (-1)^l B_l \in \mathbb{Z}$$
があるので. 題意は示された □

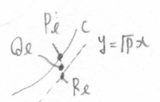
(2) 点 (A_l, B_l) をかんがえる. ②及び $A_1=1, B_1=t$ から帰納的に $A_k, B_k > 0$ で.
$$A_{k+1} - A_k = (t-1)A_k + B_k > 0$$
で. $(t-1)A_k + B_k \in \mathbb{Z}$ とあわせて. $\{A_k\}$ は単調に増加し無限大に発散する。したがって任意の $N\in\mathbb{N}$ に対し, k を十分大きくとれば
$$N \le A_k \qquad \cdots ③$$
をみたす。一方①から $0 < p-t < 1$ だから. $(p-t)^k$ は k について単調減少で 0 に収束し, 任意の N に対し, k を十分大きくとれば
$$\frac{1}{N} \ge (p-t)^k = (-1)^k(-A_k\sqrt{p}+B_k) \qquad \cdots ④$$
をみたす。したがって ③. ④ を共にみたす自然数 k があって, 点 (A_k, B_k) と $y=\sqrt{p}x$ の距離について
$$\frac{|A_k\sqrt{p} - B_k|}{\sqrt{p+1}} \le \frac{1}{N} \quad (\because p \in \mathbb{N}),$$
だから. 以上から (A_k, B_k) は題意をみたす。よって示された □

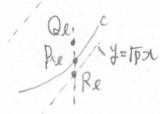
(3) $C: \dfrac{x^2}{q/p} - \dfrac{y^2}{q} = -1$ とおく。C の漸近線は $y = \pm\sqrt{p}x$ である。

点 $Q_l(A_l, B_l)$, $P_l(A_l, \sqrt{pA_l^2+q})$, $R_l(A_l, \sqrt{p}A_l)$ と定める.



(2) から. 十分大きな l をとれば
$$|R_lQ_l| = |B_l - \sqrt{p}\cdot A_l| \le \frac{1}{2M} \qquad \cdots ⑤$$
をみたすように出来る。又
$$|P_lR_l| = \left|\sqrt{pA_l^2+q} - \sqrt{p}A_l\right| = \left|\frac{q}{\sqrt{pA_l^2+q}+\sqrt{p}A_l}\right|$$





より. これは A_l について単調減少, つまり l について単調減少で, 0 に収束するから. 十分大きな l をとれば
$$|P_lR_l| \le \frac{1}{2M} \qquad \cdots ⑥$$
とできる。以上から ⑤⑥ をいずれもみたす l があって.
$$P_lQ_l \le P_lR_l + Q_lR_l \le \frac{1}{M}$$
となるから. P_l, Q_l が題意の P, Q の1つとして存在する □

(4) ② に代入して. $t=2$ から
$$A_{k+1} = 2A_k + B_k$$
$$B_{k+1} = 5A_k + 2B_k$$
となり. $A_4 = 72$, $B_4 = 161$ となる. ここで $P'(72, \sqrt{5\cdot 72^2+2})$ は C 上の点で
$$\overline{P'Q_4} = \left|\sqrt{5\cdot 72^2+2} - 161\right| = \frac{1}{\sqrt{5\cdot 72^2+2}+161} < \frac{1}{100}$$
となる. したがって $Q_4(72, 161)$ は題意をみたす。

第 3 問

[解] (1) $a_n \geqq 2$ …①

$x_0=0$ の時, $x_2=a_1x_1$, $x_3=(a_1a_2-1)x_1$ … となり, 帰納的に $x_n=k_nx_1$ $(n\geqq 1)$ と表せることがわかる。今, 漸化式から k_n は x_1 によらない定数で, $k_n \neq 0$ ($\because$①) だから, $x_m=1$ より, $x_1=\dfrac{1}{k_m}$ $(\neq 0)$ …② 漸化式の両辺 x_1 で割って

$$k_{n+2}=a_{n+1}k_{n+1}-k_n \quad \cdots ③$$

$k_1=1$, $k_2=a_1$ より $k_1<k_2$ で, $p\in\mathbb{N}\geqq 1$ に対し $k_{p+1}>k_p>0$ と仮定すると,

$$k_{p+2}>(a_{p+1}-1)k_{p+1}\geqq k_{p+1}>0 \ (\because ①)$$

だから, 帰納的に $0<k_1<k_2<\cdots<k_m$ となる。このことと②から,

$$0<x_1<x_2<\cdots<x_{m-1}<x_m=1$$

となり, x_n が一意に定まる $\left(x_n=\dfrac{k_n}{k_m}\right)$ 図

(2) $a_n \geqq 1+b$, $b>0$ …④

$y_0=0$, $y_{n+2}=a_{n+1}y_{n+1}-by_n$ から, $y_2=a_1y_1$, $y_3=(a_1a_2-b)y_1$, … となり, 帰納的に $y_n=l_n\cdot y_1$ (l_n は y_1 によらない定数) と表せることがわかる。$(n\geqq 1)$. $l_1=1$, $l_2=a_1$ より, $0<l_1<l_2$ で (④), $l_{p+1}>l_p>0$ $(p\in\mathbb{N})$ と仮定すると, 漸化式より,

$(y_m=l_m\cdot y_1=1$ より, $y_1\neq 0)$

$$l_{p+2}=a_{p+1}l_{p+1}-bl_p$$
$$>(a_{p+1}-b)l_{p+1}\geqq l_{p+1}>0 \ (\because ④)$$

だから, $n=p+1$ でもこれが成立し, 帰納的に

$$0<l_1<l_2<\cdots<l_m$$

となる。$y_m=1$ から, $y_1=\dfrac{1}{l_m}$ だから, $y_n=\dfrac{l_n}{l_m}$ で,

$$0<y_1<y_2<\cdots<y_{m-1}<y_m=1$$

となって, 数列 $\{y_n\}$ がただ1つ存在する。図

(3) $a_n\geqq c>2$ から, (1)で定まる $x_n=\dfrac{k_n}{k_m}$ は, $0<x_1<x_2<\cdots<x_m=1$,

$k_1=1$, $k_2=a_1$, $k_{n+2}=a_{n+1}k_{n+1}-k_n$ をみたす.

$$k_{n+2}=a_{n+1}k_{n+1}-k_n$$
$$>(a_{n+1}-1)k_{n+1} \quad (0<k_n<k_{n+1})$$
$$>(c-1)k_{n+1} \quad (a_n>c) \quad \cdots ⑤$$

$r=\dfrac{1}{c-1}$ とおくと, $2<c$ から $0<r<1$ で, ⑤をくり返し用いて, $n\geqq 1$ に対して

$$k_m>\left(\frac{1}{r}\right)^{m-n}k_n$$

だから, $x_n=\dfrac{k_n}{k_m}$, $k_n>0$ より

$$x_n<r^{m-n}$$

したがって, $r=\dfrac{1}{c-1}$ とすれば条件がみたされるので, 題意は示された 図

$x_n > \cdots > 1$

$r^k > r \quad k_{n+2} > k_{n+1}$

x_1

$k_n < r^m \left(\frac{1}{r}\right)^n / k_m$

$m-n$

$n-m$

$m-(m-1)$

$k_m < r^{m-n} k_m$