第 1 問

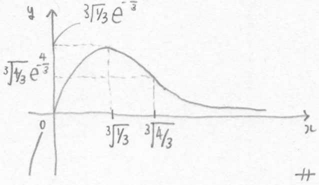
[解] (1) $f'(x)=e^{-x^3}(1-3x^3)$, $f''(x)=e^{-x^3}(-9x^2-3x^2+9x^5)=e^{-x^3}\cdot 3x^2(3x^3-4)$ から、

下表をうる。

x		0		$\sqrt[3]{1/3}$		$\sqrt[3]{4/3}$	
f'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
f''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$

//

グラフは右図. $\left(\begin{array}{l} x\to+\infty \text{ で } f(x)\to 0 \\ x\to-\infty \text{ で } f(x)\to-\infty \end{array}\right)$



//

(2) $V_1(c)=\int_0^c \pi\{f(x)\}^2dx$ …① であり、

$$\int_0^c \{f(x)\}^2dx=\int_0^c x^2\cdot e^{-2x^3}dx=\frac{-1}{6}\left[e^{-2x^3}\right]_0^c=\frac{1}{6}(1-e^{-2c^3})$$

だから①に代入して

$$V_1(c)=\frac{\pi}{6}(1-e^{-2c^3})\longrightarrow\frac{\pi}{6}\ \ (c\to\infty)$$ //

(3) $f(x)$ の $x\sim x+\Delta x$ ($\Delta x \ll 1$) の部分を y 軸まわりに回転した立体の体積は、幅 Δx、高さ $f(x)$、長さ $2\pi x$ の直方体の体積で近似できるから、$p=\sqrt[3]{1/3}$ として

$$V_2=\int_0^p 2\pi x(M-f(x))\,dx \quad \cdots ②$$

であり、

$$\left\{\begin{array}{l}\int_0^p xf(x)\,dx=\int_0^p x^2\cdot e^{-x^3}dx=\left[-\frac{1}{3}e^{-x^3}\right]_0^p=\frac{1}{3}(1-e^{-p^3}) \quad \cdots ③ \\ \int_0^p x\,dx=\frac{1}{2}p^2\end{array}\right.$$

を②に代入して

$$V_2=2\pi\left[\frac{1}{2}Mp^2-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}e^{-p^3}\right]$$
$$=2\pi\left[\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}}\right] \quad (\because p=\sqrt[3]{1/3},\ M=\sqrt[3]{1/3}\cdot e^{-\frac{1}{3}})$$
$$=2\pi\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}\right)$$ //

第　問

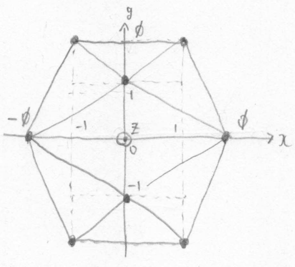
▷ 正20面体のつくり方

座標空間で、黄金比 $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ を用いて…

xy 平面上の $(\pm 1, \pm \phi, 0)$

yz 平面上の $(0, \pm 1, \pm \phi)$

xz 平面上の $(\pm \phi, 0, \pm 1)$



▷この手の立体の体積は、中心を頂点、各面を底面とする錐に分割する。

02. 下.後2

第 2 問

[解] (1) $\overrightarrow{P_1P_2}=\begin{pmatrix}-a\\a-b\\b\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{P_1P_3}=\begin{pmatrix}b-a\\-b\\a\end{pmatrix}$ だから. $\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\overrightarrow{P_1P_3}=(b-a)^2+ab$ で:

$$\triangle P_1P_2P_3=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{P_1P_2}|^2|\overrightarrow{P_1P_3}|^2-(\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\overrightarrow{P_1P_3})^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{\{a^2+b^2+(b-a)^2\}^2-\{ab+(b-a)^2\}^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2-ab)^2\cdot 3}=\frac{\sqrt{3}}{2}(a^2+b^2-ab)\ //\quad(\because a^2+b^2-ab\geqq 0)$$

又. $\triangle P_1P_2P_3$のある平面の法線ベクトルの1つに$\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$があるから、Oからこの平面への垂足Hとして.

$$|\overrightarrow{OH}|=\frac{|\overrightarrow{OP_1}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{|a+b|}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}(a+b)\ //\quad(\because a,b>0)$$

(2) (1)から.

$$(\text{四面体}OP_1P_2P_3)=\frac{1}{3}|\overrightarrow{OH}|\triangle P_1P_2P_3=\frac{1}{6}(a+b)(a^2-ab+b^2)\ //$$

一方. $\triangle OP_1P_2S$は. $\triangle OP_2S_2=ab$を底面とみると, 高さがaだから.

$$(\text{四面体}OP_1P_2S)=\frac{1}{3}a^2b\ //$$

(3) Dは. $\triangle P_1P_2P_3$と合同な三角形8つ, $\triangle OP_1P_2S$に合同な三角形12つから出来るから,

$$V=\frac{4}{3}(a+b)(a^2-ab+b^2)+4a^2b$$

$t=\tan\theta$とすると

$$V=\frac{4}{3}a^3(1+t)(t^2-t+1)+4a^3t$$
$$=\frac{4}{3}\frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}(t^3+3t+1)\quad\left(\because a>0\text{から }a=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)$$
//

(4) $f(t)=\dfrac{t^3+3t+1}{(1+t^2)^{3/2}}$ $(0<t<1)$とおく。$f(t)>0$から自然対数をとって.

$$\log f(t)=\log(t^3+3t+1)-\frac{3}{2}\log(t^2+1)$$
$$\frac{f'(t)}{f(t)}=\frac{3t^2+3}{t^3+3t+1}-\frac{3}{2}\frac{2t}{t^2+1}$$
$$=3\frac{(t^2+1)^2-t(t^3+3t+1)}{(t^3+3t+1)(t^2+1)}=3\frac{-t^2-t+1}{(t^3+3t+1)(t^2+1)}$$

だから. $t^2+t-1=0\iff t=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$より. 下表をうる。

t	0		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		1
f'		+	0	−	
f		↗		↘	

したがって. $t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ // の時, 最大値をとる。図

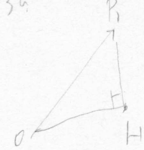
$a-b$ b $-a$ $a-b$

$-b$ a $b-a$ $-b$

a^2-b^2

$a(a-b)+b^2$ b^2-ab+ $ab-1(b-a)^2$

$a^2+b^2-3a^2$



$\frac{\sqrt{3}}{9}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$(1+t)(t^2-t+1)$

a $(s+c)(1-sc)+3c^2s$

$s+c-s^2c-sc^2+3c^2s$

$s+c-s^2c+2c^2s$ $\frac{4+t^2}{1+t^2}$ $s+c^3$

$(1-s^2)c$

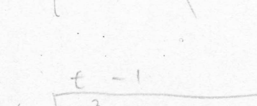
$\cancel{c^3+s(1+2c^2)}$

$s.c\geqq 0$

c^3

$t^4+2t^2+1-t^4-3t^2-t$

$t^2=1-t$

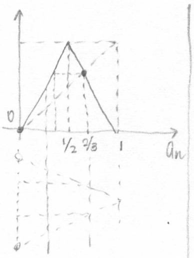


$$\begin{array}{r} t\ -1 \\ t^2+t-1\ \overline{)\ t^3 \qquad +3t+1} \\ t^3+t^2 \qquad -t \\ \hline -t^2 \qquad +4t+1 \\ -t^2 \qquad -t+1 \\ \hline 5t \end{array}$$

2002

第 3 問

[解] $\{a_n\}$の漸化式は右図で与えられる。



(1) グラフから, $b=0, \frac{2}{3}$ //

(2) $a_4=0 \Leftrightarrow a_3=0, 1 \Leftrightarrow a_2=0, 1, \frac{1}{2} \Leftrightarrow a_1=\frac{k}{4}\ (k=0, 1, \cdots 4)$

$a_4=\frac{2}{3} \Leftrightarrow a_3=\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \Leftrightarrow a_2=\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \Leftrightarrow a_1=\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, \frac{11}{12}, \frac{7}{12}$
$\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$

だから, 以上まとめて, $a_1=\frac{i}{12}\ (i=0, 1, \cdots 12)$ //

(3) $n \geq 2$において, $a_n=0, \frac{2}{3}$となるa_1は, $a_1=\frac{i}{3 \cdot 2^{n-2}}\ (i=0, 1, \cdots 3 \cdot 2^{n-2})$で与えられること($\cdots \diamondsuit$)を帰納的に示す。(2)の過程から, $n=2$では成立するので, 以下$n=k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$での成立を仮定し, $n=k+1$でも成立することを示す。

仮定から, $i=0, 1, \cdots 3 \cdot 2^{k-2}$として

$$a_{k+1}=0, \frac{2}{3} \Leftrightarrow a_2=\frac{i}{3 \cdot 2^{k-2}} \Leftrightarrow a_1=\frac{1}{2}a_2, 1-\frac{1}{2}a_2$$

$$\Leftrightarrow a_1=\frac{i'}{3 \cdot 2^{k-1}}\ (i'=0, 1, \cdots 3 \cdot 2^{k-2})$$

だから$\diamondsuit$は$n=k+1$でも成立。以上から$\diamondsuit$が示された。従って, ある$n \geq 1$に対して$a_n=0, \frac{2}{3}$となるようなa_1は ($0, \frac{2}{3}$が$\frac{i}{3 \cdot 2^{n-2}}$に含まれていることから)

$$a_1=\frac{i}{3 \cdot 2^{k-2}}\ (k \in \mathbb{N}_{\geq 2},\ i=0, 1, \cdots 3 \cdot 2^{k-2})$$ //

と表される.

(4) a_1が(3)の条件をみたさない値で, かつ任意の$n \in \mathbb{N}$に対して$a_n < \frac{3}{4}$だと仮定する。

$a_\ell < \frac{1}{2}$の時 $a_{\ell+1}=2a_\ell$だから, $a_1 < \frac{1}{2}$ならばくり返しこれを用いて, $a_m \geq \frac{1}{2}$なるmが必ず存在する。$m \leq n$をみたす自然数nに対して,

$$\frac{1}{2} \leq a_n < \frac{3}{4}$$

が成立する。したがって, $m \leq n$に対しては

$$a_{n+1}=2(1-a_n) \qquad \therefore a_{n+1}-\frac{2}{3}=-2\left(a_n-\frac{2}{3}\right)$$

が用いられるので,

$$a_n=(-2)^{n-m}\left(a_m-\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3}$$

仮定から$a_m \neq 0$なので, $a_n \to +\infty$となり矛盾。したがって背理法により示された //

(5) 「a_1が(3)の条件をみたす$\Leftrightarrow a_n=0, \frac{2}{3}$なる$n$が存在する」であり, $b=0, \frac{2}{3}$は$\{a_n\}$の恒等写像だから,

"a_1が(3)の条件をみたす$\longrightarrow \{a_n\}$は収束する" $\cdots$①

が成り立つ。以下, a_1が(3)の条件をみたさない時をかんがえる。この時, $a_m \geq \frac{3}{4}$なる$m \in \mathbb{N}$が存在し, ($\because$(4)) 漸化式から$a_{m+1} \leq \frac{1}{2}$となる。この後 $a_{m+1}=a'_1$とみなして$a'_{n+1}=f(a'_n)$で数列$\{a'_n\}$を定めると, a'_1は(3)の条件をみたさないので, 再び$a'_\ell \geq \frac{3}{4}$なるℓがある。以下無限にこれがくり返され, a_nは収束しない $\cdots$②

①②から, 求める必要十分条件は

"$a_1=\frac{i}{3 \cdot 2^{k-2}}\ (k \in \mathbb{N}_{\geq 2},\ i=0, 1, \cdots 3 \cdot 2^{k-2})$と表されること" //

である。

[(4)の別解]

数列の各項を2進数で表してかんがえる。

$a_n \leq \frac{1}{2}$ つまり $a_n=0.0\cdots$の時, a_nを1ケタ上げてa_{n+1}をうる
$a_n \geq \frac{1}{2}$ つまり $a_n=0.1\cdots$の時, 〃 1と0を入れかえてa_{n+1}をうる.

から, a_nの中に100, 011なるならびがある時, 作業をくり返して$0.100\cdots$又は0.011がえられ, 次に$0.11\cdots$がえられるので$a_n \geq \frac{3}{4}$が成立。他の場合,

$$a_1=0.0\cdots 0101010\cdots$$

となり, $0.101010\cdots=\frac{2}{3}$から, $a_1=\frac{2}{3 \cdot 2^m}$と表される。よって任意の$n$に対し$a_n > \frac{3}{4}$となる条件は(3)の条件に含まれる。対偶から題意は成立 //