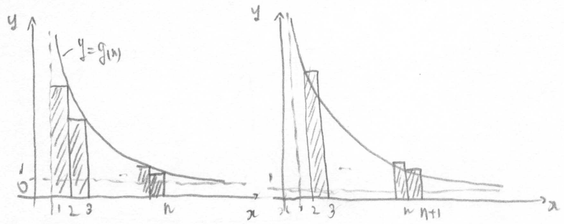
第 1 問

[解] $f(n)=\sum_{k=2}^{n}\frac{k}{\sqrt{k^2-1}}$, $g(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ $(x>1)$ とおくと

$g'(x)=\frac{-1}{(x^2-1)^{3/2}}<0$, $g''(x)=3x(x^2-1)^{-5/2}>0$ から $y=g(x)$ のグラフ

は下に凸で $g(x)\longrightarrow+\infty$ $(x\to1)$, $g(x)\to1$ $(x\to\infty)$ から グラフは

下図 (斜線部は $f(n)$ を表す)



面積を比較して $S_n=\int_3^n g(x)\,dx$ とおくと, $n\geqq3$ の時.

$$S_n+g(2)+g(n)+\frac{1}{2}(g(3)-g(n))<f(n)<S_n+g(2)+g(3) \quad \cdots ①$$

$S_n=\left[\sqrt{x^2-1}\right]_3^n=\sqrt{n^2-1}-2\sqrt{2}$, $g(2)=\frac{2}{3}\sqrt{3}$, $g(n)=\frac{n}{\sqrt{n^2-1}}$, $g(3)=\frac{3}{2\sqrt{2}}$ を①に代入

$$\sqrt{n^2-1}-2\sqrt{2}+\frac{2}{3}\sqrt{3}+\frac{3}{4\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\frac{n}{\sqrt{n^2-1}}<f(n)<\sqrt{n^2-1}+\frac{3}{2\sqrt{2}}-2\sqrt{2}+\frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$$\sqrt{n^2-1}+\frac{1}{2}\frac{n}{\sqrt{n^2-1}}+\frac{2}{3}\sqrt{3}-\frac{13}{8}\sqrt{2}<f(n)<\sqrt{n^2-1}+\frac{2}{3}\sqrt{3}-\frac{5}{4}\sqrt{2} \quad \cdots ②$$

$A(n)=n-f(n)$, $h(x)=x-\sqrt{x^2-1}$ とおくと. ②に代入して

$$h(n)+\frac{2}{3}\sqrt{3}+\frac{5}{4}\sqrt{2}<A(n)<h(n)-\frac{1}{2}\frac{n}{\sqrt{n^2-1}}-\frac{2}{3}\sqrt{3}+\frac{13}{8}\sqrt{2} \quad \cdots ③$$

ここで $h'(x)=1-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=1-\sqrt{1+\frac{1}{x^2-1}}<0$ $(x>1)$ より $h(x)$ は単調減少.

これと $h(x)\to0$ $(x\to\infty)$ から. $0<h(x)$ $(1<x)$ $\cdots ④$

したがって ④とあわせて $3\leqq n$ なる全ての $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$A(n)>\frac{5}{4}\sqrt{2}-\frac{2}{3}\sqrt{3}>\frac{5}{4}\cdot1.414-\frac{2}{3}\cdot1.733\geqq0.6121 \quad \cdots ⑤$$

が成り立つ。一方. $\left(\frac{n}{\sqrt{n^2-1}}\right)\to1$ $(n\to\infty)$ と③から.

$$-\frac{2}{3}\sqrt{3}+\frac{5}{4}\sqrt{2}<\lim_{n\to\infty}A(n)<1-\frac{2}{3}\sqrt{3}+\frac{13}{8}\sqrt{2}$$

⑤と同様にして

$$0.6121<\lim_{n\to\infty}A(n)<-\frac{1}{2}+\frac{13}{8}\cdot1.415-\frac{2}{3}\cdot1.733\leqq0.647 \quad \cdots ⑥$$

である。題意から まず $n\to\infty$ での成立が必要で $i\leqq6$ 。逆にこの時

⑤から十分であるから. もとめるのは $i=6$ //

$-2+\frac{3}{8}\sqrt{2}$

8

$-16+3$

$\frac{3}{4}\sqrt{2}-2\sqrt{2}$

$\frac{3}{8}\sqrt{2}-2\sqrt{2}$

$n-\sqrt{n^2-1}-\frac{1}{2}\frac{n}{\sqrt{n^2-1}}$

$\frac{3}{4}-2$

$n-\frac{2n^2+n-2}{2\sqrt{n^2-1}}$

4

$2(n^2-1)+n$

$\sqrt{x^2-1}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$

x^2-1-

-1

-1.154…

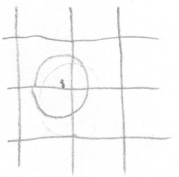
1

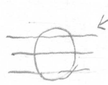
-1.853…

2.299375…

第 2 問

▷ 2本と交わるのは…



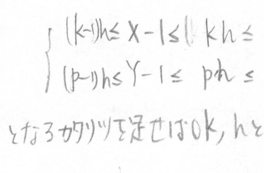


小さすぎ?

$2h \leq 2$

まず. hが小さすぎるとダメで. $1<h$が必要

この時, たまたま円が落下した時の中心の件によって2本と交わるかかわる。格子の方程式を $x=nh$, $y=nh$ として.



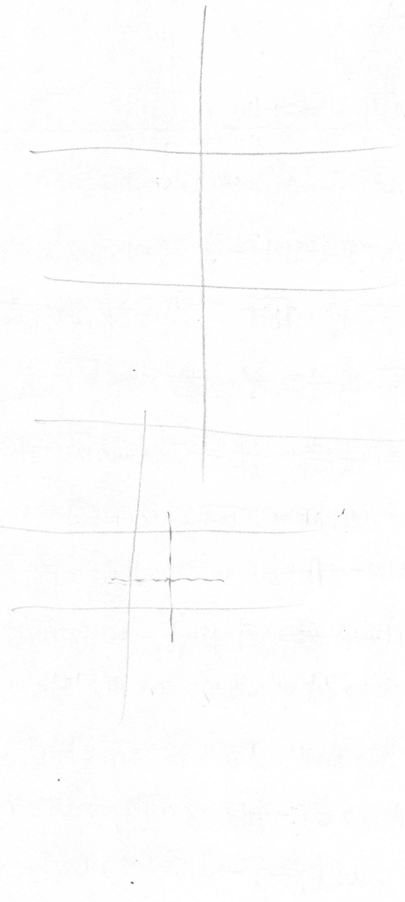
$X-1 \leq x \leq X+1$, $Y-1 \leq y \leq Y+1$ にこれをみたす

nが2つだけある条件は…

▷ この時. 明らかにタテヨコ1本ずつだから.

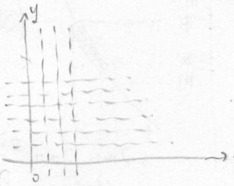
$$\begin{cases} (k-1)h \leq X-1 \leq kh \leq X+1 \leq (k+1)h \\ (p-1)h \leq Y-1 \leq ph \leq Y+1 \leq (p+1)h \end{cases}$$

となるカクリツを足せばOk, hと1の大小で場しておわり.

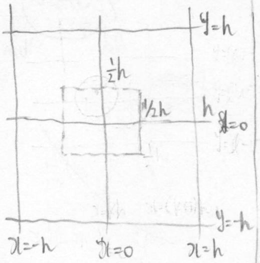


第 2 問

[解] (1) 右のように座標を定め、円の中心 $P(X,Y)$ とおく。



点線は格子を表し、$x=kh$, $y=kh$ $(k\in\mathbb{Z})$ となっている。対称性から、円が2直線とのみ交わる時、x軸平行及びy軸平行と1本ずつ交わる。又、$h<1$の時は必ず3本以上の直線と交わるから …① 以下 $1\le h$ として かんがえる。図の格子は、$k, l\in\mathbb{Z}$として

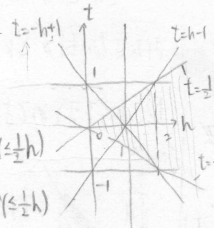


$$D_{(k,l)}\begin{cases}(k-\frac{1}{2})h\le x\le (k+\frac{1}{2})h\\(l-\frac{1}{2})h\le y\le (l+\frac{1}{2})h\end{cases}$$

なる領域 (いずれも対称) の集合とみなせるから、このうちの1つ $D(0,0)$ 中に円の中心 (X,Y) がある時のみをかんがえればよい。この時、$x=0$, $y=0$ と交わり、$x=\pm h$, $y=\pm h$ と交わらなければ良い。このような X,Y の条件は、円の半径1から、

$$\begin{cases}-h\le X-1\le 0\le X+1\le h\\-h\le Y-1\le 0\le Y+1\le h\end{cases}$$ (接する場合は考慮していない)

$\therefore\ \max(1-h,-1)\le X, Y\le \min(h-1,1)$ …②



右図から②の条件は

$$\begin{cases}1\le h\le 2\text{の時},\ 1-h\le X,Y\le h-1\ (-\frac{1}{2}h\le X,Y\le\frac{1}{2}h)\\2\le h\text{の時},\ -1\le X,Y\le 1\ (-\frac{1}{2}h\le X,Y\le\frac{1}{2}h)\end{cases}$$

したがって、このようになるカクリツ $P(h)$ は

$$P(h)=\begin{cases}\left(\frac{(h-1)-(1-h)}{h}\right)^2 & (1\le h\le 2)\\\left(\frac{2}{h}\right)^2 & (2\le h)\end{cases}$$

①とあわせて、

$$P(h)=\begin{cases}0 & (0\le h\le 1)\\4\left(\frac{h-1}{h}\right)^2 & (1\le h\le 2)\\\left(\frac{2}{h}\right)^2 & (2\le h)\end{cases}$$ …☆

//

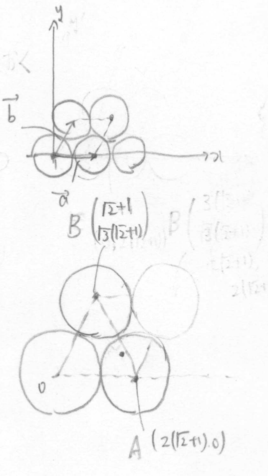
(2) (1)と同様に、右のように座標をおく。そして

$\vec{a}=\begin{pmatrix}2(\sqrt{2}+1)\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b}=2(\sqrt{2}+1)\begin{pmatrix}1/2\\\sqrt{3}/2\end{pmatrix}$

とおくと、(1)と同じく、

$$D:\{m\vec{a}+n\vec{b}\mid 0\le m,n\ m+n\le 1\}$$

の内部に円Cの中心 $P(X,Y)$ がある時のみをかんがえれば良い。この時、Cの半径1だから、右図の3円とのみ交わりうる。したがって、Cが3円とのみ交わる時、



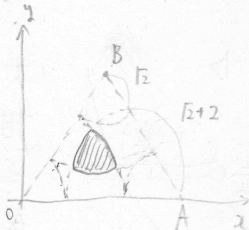
$PO=l_1$, $PA=l_2$, $PB=l_3$ が

$$\sqrt{2}\le l_k\le\sqrt{2}+2\quad(k=1,2,3,4)$$

をみたせば良い。各辺正から2乗してよく、

$$2\le l_k^2\le 6+4\sqrt{2}$$

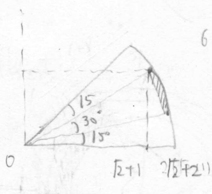
これをみたす (X,Y) の領域は右図斜線部



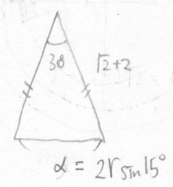
この面積 S は

$S=3\,(\text{扇形部分})+\triangle^\alpha$ …①

であり、右図から、$r=\sqrt{2}+2$として



$$(\text{扇形部分})=\frac{1}{2}\frac{\pi}{6}r^2-\frac{1}{2}r^2\sin\frac{\pi}{6}=\left(\frac{\pi}{12}-\frac{1}{4}\right)r^2\quad\cdots②$$



$$\triangle=\frac{\sqrt{3}}{4}\alpha^2=\sqrt{3}\sin^2 15^\circ r^2=\sqrt{3}\cdot\frac{1-\cos 30^\circ}{2}r^2=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)r^2\quad\cdots③$$

$\alpha=2r\sin 15^\circ$

②.③を①に代入して

$$S=\frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{3}-1\right)r^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4}\right)r^2\quad\cdots④$$

一方、$\triangle OAB=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(2(\sqrt{2}+1))^2=\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}+2))^2=\frac{\sqrt{3}}{2}r^2$ だから④とあわせて

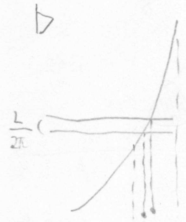
$$q=\frac{\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}\right)r^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}r^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{2}\pi+\sqrt{3}-3\right)$$

//

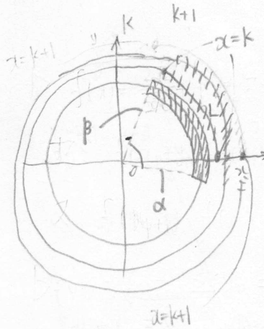
(2)

第3問

▷



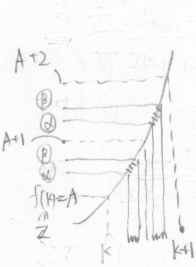
大ざっぱにいえば、k〜k+1が何周分かに相当し、カタムキも一定とみなせるから確率的に、$k \le x \le k+1$ が 2π に相当するうち、Lの分だけが T_k になるので、$T_k \to \frac{L}{2\pi}$ っぽい。

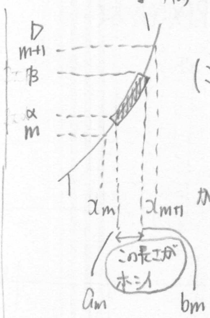


▷$f(x)$ がセイスウ係数だから、$f(k) \in \mathbb{Z}$, $f(k+1) \in \mathbb{Z}$ より始点、終点は(1,0)に確定する。考えやすくするため、Lの2端点の位相を $2\pi\alpha$, $2\pi\beta$ とする。$\alpha \le f(x) \le \beta$ (ユマカイことは抜き) ならば、このxは集合に含まれる。

▷したがって左下図から、mとかおき、つまり直線でfを近似する(はさみうち)方法でもとめようという方針がうかぶ。カンタンのため、$k \le x \le k+1$ のうちで、$m \le f(x) \le m+1$ をみたす部分に注目し、これをたしあわせて答えをえる。

(極限だから、くり返しですむはず)





$b_m - a_m$ がほしい。$\frac{L}{2\pi} = \beta - \alpha$ であり。

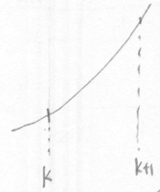
(これは α, β がまたがっている時も成立する!?)

$$\begin{cases} f(a_m) = \alpha \\ f(b_m) = \beta \end{cases}$$

から、平均値より

$$\frac{f(b_m) - f(a_m)}{b_m - a_m} = f'(c_m) \quad \therefore b_m - a_m = \frac{\frac{L}{2\pi}}{f'(c_m)}$$

b_m: x_m は、$f(k) = D$, $f(k+1) = E$ とすれば、$m = D$ から $E-1$ までの $E-D$ 通り。



$$T_k = \sum_{m=D}^{E-1} (b_m - a_m) = \frac{L}{2\pi} \sum_{m=f(k)}^{f(k+1)-1} \frac{1}{f'(c_m)}$$

ここで、$f(x) = Ax^2 + Bx + C$, $f'(x) = 2Ax + B$ より、

$$f'(k) < f'(c_m) < f'(k+1)$$

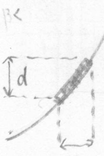
$$2Ak + B < f'(c_m) < 2Ak + 2A + B$$

あ!? $f(k+1) - f(k)$ は kの1次だからおわった!?

これで評価できないわけないよネ(~~)

→これを、またがっている場合に拡張するなら"逆"にすればよい。つまり、みたさない部分 S_k が $S_k \to \frac{2\pi - L}{2\pi}$ を示して、$T_k + S_k = 1$ からおわる。

▷これらをまとめて扱うには…"平均変化率"を用いると…



$d = \Delta C$ とかける。又、$\sum d = \frac{L}{2\pi} |f(k+1) - f(k)|$ である。

したがって、$\underbrace{\min \Delta}_{f'(k)} < \Delta < \underbrace{\max \Delta}_{f'(k+1)}$ ではさんで、

$$f'(k) \frac{\sum C}{T} < d < f'(k+1) \frac{\sum C}{T}$$

とすれば良い。

極限で、カタムキが出てきた時は、平均変化率Δを用いるとラクにいくことがある。(統一的にあつかえる。)

これは、平均値の定理をより大ざっぱにしたカンジ!?

第3問

[解] $[k,k+1]$の部分集合D_kを

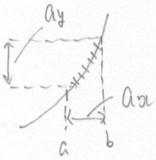
$$D_k = \{x \mid k \le x \le k+1,\ P(x) \in I\}$$

によって定める。$f(x)$の$k \le x \le k+1$の部分は、$k \to \infty$とすれば区間内で単調増加として良い。(∵2次係数が正) $f(x) = Ax^2+Bx+C$ とおく。($A \in \mathbb{N}$, $B, C \in \mathbb{Z}$) 同区間で$f''(x) = 2A > 0$からfは下に凸である …①

ここで一般に連続,微分可能,単調増加かつ下に凸な関数② $g(x)$の$a \le x \le b$の部分のy軸への正射影の長さをa_y, x軸への正射影($=b-a$)の長さをa_x, 区間内での平均変化率Δとして、

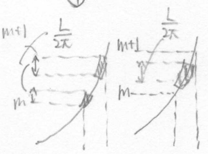
$$a_y = \Delta a_x$$

が成り立つ。 …③



さて、$f(k), f(k+1) \in \mathbb{Z}$から$f(k) \le y \le f(k+1)$の間には$f(k+1)-f(k)$コの整数で区切られた区間が存在し、このうちの各々に、D_kのy軸への正射影が長さ$\frac{L}{2\pi}$で含まれるから、$f(x)$ $(x \in D_k)$のy軸への正射影をP_kとして、

$$P_k = \frac{L}{2\pi}\left(f(k+1)-f(k)\right) \quad \cdots ④$$



である。$[k,k+1]$内の任意の区間での$f(x)$の平均変化率Δは、①から

$$f'(k) \le \Delta \le f'(k+1) \quad \cdots ⑤$$

をみたす。$f(x)$は②をみたすので③④⑤から

$$f'(k) \cdot T_k \le P_k \le f'(k+1)\, T_k$$

kが十分大きければ$f'(k) = 2Ak+B > 0$だから

$$\frac{P_k}{f'(k+1)} \le T_k \le \frac{P_k}{f'(k)}$$

$$\frac{2Ak+A+B}{2Ak+2A+B} \cdot \frac{L}{2\pi} \le T_k \le \frac{2Ak+A+B}{2Ak+B} \cdot \frac{L}{2\pi} \quad \cdots ⑥$$

$k \to \infty$の時 α, βをkにムカンケイな定数として

$$\frac{2Ak+\beta}{2Ak+\alpha} = \frac{2A+\beta/k}{2A+\alpha/k} \longrightarrow 1$$

だから⑥の両辺は$\frac{L}{2\pi}$に収束する。したがってはさみうちから

$$T_k \longrightarrow \frac{L}{2\pi} \quad //$$

$A(k+1)^2 + B(k+1)$
$-\ Ak^2 + Bk$
$2kA + A + B$