2000 [1]

第1問

[解] (1) k=1の時

$P_1(x)-P_1(x-1)=1$ が全てのxで成立する。$n\in\mathbb{N}$として.

$$P_1(n+1)=P_1(n)+1$$

くり返し用いて. $P_1(0)=0$ とから.

$$P_1(n)=n$$

これが任意の非負セイスウで成立し, $P_1(x)$ が1次だから. $P_1(x)=x$ //

k=2の時

$P_2(n+1)-P_2(n)=n+1$ をくり返し用いて, $n\geq 1$に対して.

$$P_2(n)=P_2(0)+\sum_{k=0}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)\quad(\because P_2(0)=0)$$

k=1の時と同様, $P_2(x)=\frac{1}{2}x(x+1)$ //

(2) (1)と同様に. 一般のkに対して, $P_k(n+1)=P_k(n)+(n+1)^{k-1}$ だからくり返し用いて. $n\geq 1$の時,

$$P_k(n)=P_k(0)+\sum_{i=0}^{n}i^{k-1}=\sum_{i=1}^{n}i^{k-1}\quad\cdots①$$

である。ここで①をみたすk次多項式 $P_k(x)$ が唯1つ存在することを帰納的に示す。

(1)から. k=1,2の時は成立する。以下 $k\leq l$ $(l\in\mathbb{N}_{\geq 2})$ での成立を仮定する。

$$(i+1)^{l+1}-i^{l+1}=\sum_{t=0}^{l}{}_{l+1}C_t\cdot i^t=(l+1)\cdot i^l+\sum_{t=0}^{l-1}{}_{l+1}C_t\cdot i^t$$

だから $i=1,\cdots,n$ として足して

$$\begin{aligned}(n+1)^{l+1}-1&=\sum_{i=1}^{n}\left\{(l+1)i^l+\sum_{t=0}^{l-1}{}_{l+1}C_t\cdot i^t\right\}\\&=(l+1)\sum_{i=1}^{n}i^l+\sum_{t=0}^{l-1}{}_{l+1}C_t\left(\sum_{i=1}^{n}i^t\right)\\&=(l+1)\sum_{i=1}^{n}i^l+\sum_{t=0}^{l-1}{}_{l+1}C_t\cdot P_{t+1}(n)\end{aligned}$$

から. $P_{l+1}(n)=\frac{1}{l+1}\left[(n+1)^{l+1}-1-\sum_{t=0}^{l-1}{}_{l+1}C_t\cdot P_{t+1}(n)\right]$ は①をみたす。

これが任意の$n\in\mathbb{N}$で成立し, かつ $P_{l+1}(x)$ は $l+1$次式だから. $P_{l+1}(x)$ は

$$P_{l+1}(x)=\frac{1}{l+1}\left[(x+1)^{l+1}-1-\sum_{t=0}^{l-1}{}_{l+1}C_t\cdot P_{t+1}(x)\right]$$

とかけることが必要。ここで仮定から. これは $l+1$次式であり…②, $P_{l+1}(x)$ は高々1つしか存在しない。…③ 次にこの $P_{l+1}(x)$ が(c)をみたすことを示す。

$$\begin{cases}\circ\ P_{l+1}(x)-P_{l+1}(x-1)=\frac{1}{l+1}\left[(x+1)^{l+1}-x^{l+1}-\sum_{t=0}^{l-1}{}_{l+1}C_t\left\{P_{t+1}(x)-P_{t+1}(x-1)\right\}\right]\\ \quad=\frac{1}{l+1}\left[(x+1)^{l+1}-x^{l+1}-\sum_{t=0}^{l-1}{}_{l+1}C_t\cdot x^t\right]=x^l\quad(\because 2項定理)\\ \circ\ P_{l+1}(0)=-\frac{1}{l+1}\sum_{t=0}^{l-1}{}_{l+1}C_t P_{t+1}(0)=0\quad(\because 仮定)\end{cases}$$

から. この $P_{l+1}(x)$ は(c)をみたし十分。以上から. 示された団

(3) 条件から. $Q_k(x)=0$ は $x=0,1,\cdots,k-1$ を解に持つので. $a\in\mathbb{R}\neq 0$として

$$Q_k(x)=a\cdot\prod_{t=0}^{k-1}(x-t)$$

とかける($\because Q$はk次多項式)。$Q_k(k)=1$から. $a=k!$で

$$Q_k(x)=\frac{1}{k!}\prod_{t=0}^{k-1}(x-t)\quad(k\in\mathbb{N})\quad\cdots④$$

とかける。$P_k(x)$. $Q_k(x)$は共にk次多項式だから, $P_k(x)$を$Q_k(x)$でわった商は定数d_k, あまりはk−1次以下だから. これを$Q_{k-1}(x)$でわった商は定数d_{k-1}, あまりはk次以下になる。これをくり返して.

$$P_k(x)=\sum_{i=1}^{k}d_i\cdot Q_i(x)+d_0\quad\cdots⑤$$

と表される。以下, $d_i\in\mathbb{Z}\wedge d_0=0$を示せば良い。$x=0$として. ④から($Q_i(0)=0$より).

$$0=d_0\quad\cdots⑥$$

$x=1$とすると, ①及び④から

$$1=d_1$$

$x=2$として.

$$1+2^{k-1}=d_2+2\cdot d_1$$

となるので $d_1\in\mathbb{Z}$から $d_2\in\mathbb{Z}$となる。これをくり返して. $x=j$の時

$$1+2^{k-1}+\cdots+j^{k-1}=d_j+\sum_{i=1}^{j-1}{}_jC_i\cdot d_i$$

となるから $d_1,\cdots,d_{j-1}$が整数として定まれば d_jも整数。以上から帰納的に $d_i\in\mathbb{Z}$ …⑦ である。⑥⑦から. $c_i=d_i$として

$$P_k(x)=\sum_{i=1}^{k}c_iQ_i(x)$$

とかける。団

2000

第 2 問

[解] $f(x)=x^l\sin nx$ とおく。

(1) $V_n=\int_0^{2\pi}\pi|f(x)|^2dx$

$$=\pi\int_0^{2\pi}x^{2l}\sin^2 nx\cdot dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{2\pi}x^{2l}(1-\cos 2nx)dx \quad ‥①$$

である。ここで

$$\int_0^{2\pi}x^{2l}dx=\frac{(2\pi)^{2l}}{2l+1} \quad ‥②$$

$$\int_0^{2\pi}x^{2l}\cos 2nx\,dx=\frac{1}{2n}\left[x^{2l}\sin 2nx\right]_0^{2\pi}-\frac{2l}{2n}\int_0^{2\pi}x^{2l-1}\sin 2nx\,dx$$

$$=-\frac{l}{n}\int_0^{2\pi}x^{2l-1}\sin 2nx\cdot dx\xrightarrow{n\to\infty}0 \quad ‥③$$

だから、①②③より

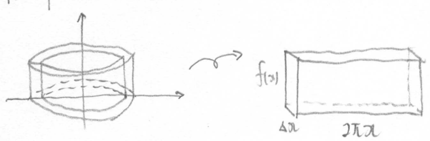
$$V_n\longrightarrow\frac{\pi}{2}\frac{(2\pi)^{2l}}{2l+1}=\frac{2^{2l-1}\cdot\pi^{2l+1}}{2l+1} \quad //$$

[※ 恐かったら一応③をもう少しくわしく書けば良い。]

$$\left|\int_0^{2\pi}x^{2l-1}\sin 2nx\,dx\right|\le\left|\int_0^{2\pi}x^{2l-1}dx\right|=\frac{(2\pi)^{2l}}{2l}$$

より、はさみうちから0に収束する

(2) Cの $x\sim x+\Delta x$ をy軸まわりに回転した体積は、Δxが十分小さい時
高さ$|f(x)|$, 幅Δx, 長さ$2\pi x$の直方体で近似できるので



$$W_n=\int_0^{2\pi}2\pi x|f(x)|dx$$

$$=2\pi\int_0^{2\pi}x^{2l+1}|\sin nx|dx \quad (∵同区間で\ x\ge 0) \quad ‥④$$

と表せる。ここで $a_k=\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi}x^{2l+1}|\sin nx|dx$ とおくと、④から

$$\frac{W_n}{2\pi}=\sum_{k=1}^{2n}a_k \quad ‥⑤$$

である。$\left[\frac{k-1}{n}\pi,\frac{k}{n}\pi\right]$ で $g(x)=x^{2l+1}$ のmax, minを与えるxを各々M_k, m_kとすると、$|\sin nx|\ge 0$から

$$g(m_k)\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi}|\sin nx|dx\le a_k\le g(M_k)\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi}|\sin nx|dx \quad ‥⑥$$

ここで $t=x-\frac{k-1}{n}\pi$ として

$$\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi}|\sin nx|dx=\int_0^{\frac{\pi}{n}}|\sin(nx+(k-1)\pi)|dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{n}}\sin nx\,dx=-\left[\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{\frac{\pi}{n}}=\frac{2}{n}$$

だから、⑥に代入して

$$\frac{2}{n}g(m_k)\le a_k\le\frac{2}{n}g(M_k)$$

$k=1,2,\cdots,2n$として足して

$$\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{2n}g(m_k)\le\frac{W_n}{2\pi}\le\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{2n}g(M_k) \quad (∵⑤) \quad ‥⑦$$

ここで区分求積から$n\to\infty$の時

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}g(m_k)\longrightarrow\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}g(x)dx=\frac{1}{\pi}\frac{(2\pi)^{l+2}}{l+2}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}g(m_k)\longrightarrow\frac{1}{\pi}\int_0^{2}g(x)dx=\frac{1}{\pi}\frac{(2\pi)^{l+2}}{l+2}$$

だから⑦及びはさみうちから

$$W_n\longrightarrow 2\pi\cdot\frac{2}{\pi}\frac{(2\pi)^{l+2}}{l+2}=\frac{4}{l+2}(2\pi)^{l+2} \quad //$$

第3問

[解] 背番号kの人がl順目に出すコインの数を$x_l(k)$とおく。

(1) $\sum_{k=1}^{5} x_1(k)=7$となる時, $x_1(k)=1$又は2だから, $x_1(k)$のうち1の数A, 2の数Bとして(A+B=5, A+2B=7から), (A,B)=(3,2)である。このようになる確率は

$$Q={}_5C_2\cdot p^3(1-p)^2=10p^3(1-p)^2 \text{ //}$$

$$\frac{dQ}{dp}=10\cdot 3p^2(1-p)^2-20\cdot p^3(1-p)=10p^2(1-p)(3-5p)$$ から下表を得る,

p	0		$\frac{3}{5}$		1
Q'		+	0	−	
Q		↗		↘	

したがってQを最大にするのは$p=\frac{3}{5}$ // でこの時$Q=\frac{2^3\cdot 3^3}{5^4}$ //

(2) Rは(1)の場合に加えて

⑦ 4人が6枚コインをおき, 5人目が2枚コインをおく。

の場合を加えたカクリツ.

⑦の時

(1)と同様にして 1枚だけ出す人は2人で カクリツは

$${}_4C_2\, p^2(1-p)^2\cdot(1-p)$$

したがって

$$R=Q+6p^2(1-p)^3$$
$$=p^2(1-p)^2(10p+6(1-p))$$
$$=2p^2(1-p)^2(2p+3) \text{ //}$$

又, $\frac{1}{2}\frac{dQ}{dp}=2p(1-p)^2(2p+3)-2p^2(1-p)(2p+3)+2p^2(1-p)^2$

$$=2p(1-p)(-5p^2-3p+3)$$

から下表を得る

p	0		$\frac{-3+\sqrt{69}}{10}$		1
Q'		↗	0	↘	
Q					

したがって $p=\frac{-3+\sqrt{69}}{10}$ //

(3) kの人が2巡で出す枚数X_kをカクリツ変数にとる.

$$E(X)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_5)$$
$$=5E(X_1)$$
$$=5\{2p^2+3(1-p)+3p(1-p)\}$$
$$=5(3-p^2) \text{ //}$$

$\frac{3^3\cdot 2^2\cdot 2\cdot 5}{5^5}$

$A+B=4$

$A+2B=7$

$B=3$

$-5p^2-3p+3$

$+p-p^2$

$(1-p)(2p+3)$ $\quad -2p^2-p+3-2p^2-3p$

$10p^2-6p^2+4-4p+6p$

$4p^2+2p+4$

p^2+p-1

$1-p+$

$\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{5})$

$1-p-2p$

$-4p^2-4p+3+p^2+p$