9819

第1問

[解] (1) $\sin(n+1)\theta = \sin n\theta\cos\theta + \cos n\theta\sin\theta$ から 両辺 $\sin\theta$ でわって、
題意より

$$f_{n+1}(x) = \cos nx + f_n(x)\cos\theta \quad \cdots ①$$

$x=0$ として、

$$C_{n+1} = C_n + 1 \quad \cdots ②$$

これと $C_1 = 1$ より、帰納的に、$C_n = n$ //

(2) $\sin 3x = (3-4\sin^2 x)\sin x = (4\cos^2 x - 1)\sin x$ だから

$$f_3(x) = 4\cos^2 x - 1$$

であり、

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f_3(x)\,dx = 2\int_0^{\pi/2}(4\cos^2 x - 1)\,dx = 2\left[4\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x\right) - x\right]_0^{\pi/2}$$

$$= 2\left(4\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) = \pi \ //$$

(3) $T_n = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f_{2n-1}(x)\,dx$ とおく。以下、$C=\cos x$, $S=\sin x$ と書く。

$$\sin(2n+1)\theta = \sin 2n\theta\cos\theta + \cos 2n\theta\sin\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin(2n+1)\theta + \sin(2n-1)\theta\right) + \cos 2n\theta\sin\theta$$

より $\frac{1}{2}\sin(2n+1)\theta = \frac{1}{2}\sin(2n-1)\theta + \cos 2n\theta\sin\theta$

より 各辺 $\sin\theta$ でわることで、

$$\frac{1}{2}f_{2n+1}(x) = \frac{1}{2}f_{2n-1}(x) + \cos 2nx$$

各辺 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ で積分して、

$$T_{n+1} = T_n + 2\int_{-\pi/2}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2nx\,dx$$

$$= T_n +$$

これと $T_2 = \pi$ から $T_n = \pi$ //

☆(1)は フツウに

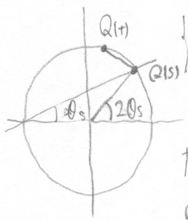
$$\frac{\sin nx}{\sin x} = \frac{\sin nx}{nx}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot n \to n$$

でよろしい

第 2 問

(3)

▷

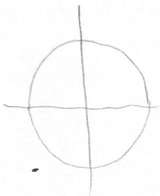


$\overline{Q(s)Q(t)}$ は、$\tan\frac{\theta_s}{2}$, $\tan\frac{\theta_t}{2}$ の関数。

$Q(s)$, $Q(t)$ の座標は、$\tan\theta_s$ の関数。

$\longrightarrow$ これらをセイスウにしたい ∧ 位相を $0\sim2\pi$ におさめたい $\tan\frac{\theta}{2}$ を有理数で決定して、2θ も座標にしたい。

ので、$0\leq2\theta<2\pi$ ∴ $0\leq\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$ つまり、$\tan\frac{\theta}{2}$ は 0 以上の任意の数。やったネ。



$\Rightarrow$ よくよくかんがえれば、$\tan\theta_n\in\mathbb{Q}$ なる θ_n を $0\leq\tan\theta_n<1$ となるようにとってくればよりラクだった。

$\frac{\pi}{4}$

第 2 問

[解] (1) 題意の直線は $y=t(x+1)$ だから交点は

$$Q(t)=\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \frac{2t}{1+t^2}\right) \quad /\!/$$

又、$\tan\theta_p = p$ となるよう θ_p ($0\leq\theta_p<\pi/2$) を定めると

$Q(t)=(\cos 2\theta_t, \sin 2\theta_t)$ であることから

$$\overline{Q(t)Q(s)}^2=(\cos 2\theta_t-\cos 2\theta_s)^2+(\sin 2\theta_t-\sin 2\theta_s)^2$$

$$=2-2\cos(2\theta_t-2\theta_s) \quad \cdots ①$$

$$=2-2\left\{\frac{1-t^2}{1+t^2}\cdot\frac{1-s^2}{1+s^2}+\frac{2t}{1+t^2}\cdot\frac{2s}{1+s^2}\right\}$$

$$=\frac{4(t-s)^2}{(1+t^2)(1+s^2)}$$

ここで $(1+t^2)(1+s^2)>0$, $t-s>0$ ($\because 0<s<t$) だから

$$\overline{Q(t)Q(s)}=\frac{2(t-s)}{\sqrt{(1+t^2)(1+s^2)}} \quad /\!/$$

(2) $\theta_s=\alpha$, $\theta_t=\beta$ である。①から

$$\overline{Q(t)Q(s)}^2=4\sin^2(\beta-\alpha)$$

$0<\alpha<\beta<\pi/2$ だから、$\sin(\beta-\alpha)>0$ より

$$\overline{Q(t)Q(s)}=2\sin(\beta-\alpha)=2(\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha) \quad \cdots ②$$

である。ここで $0<\theta<\pi$ に注意して、$t=\tan\frac{\theta}{2}$ とすると (1) から $\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin\theta=\frac{2t}{1+t^2}$ と表せるから $t\in\mathbb{Q}$ なら $\cos\theta, \sin\theta\in\mathbb{Q}$。これと②から、$u, v\in\mathbb{Q}$ なら

$\overline{Q(t)Q(s)}\in\mathbb{Q}$ である。■

(3) 点 B_k を $B_k(\cos 4\theta_k, \sin 4\theta_k)$ によって定める。この時、$0\leq\theta_k<\pi/2$ から $0\leq 4\theta_k<2\pi$ となり、任意の B_k ($k=1,2,\cdots,n$) は互いに異なる点である。 $\cdots ③$

さらに、θ_k の定義及び (2) から、任意の自然数 i, j ($i<j\leq n$) に対して

$$\overline{B_iB_j}=2(\sin\theta_j\cos\theta_i-\cos\theta_j\sin\theta_i)$$

$$=4\cdot\frac{(1+ij)(j-i)}{(1+i^2)(1+j^2)}\in\mathbb{Q} \quad \cdots ④$$

である。又、$\tan 2\theta_k=\frac{2\tan\theta_k}{1-\tan^2\theta_k}=\frac{2k}{1-k^2}\in\mathbb{Q}$ だから、(1) より B_k の座標 $\cos 4\theta_k$, $\sin 4\theta_k$ も有理数である。($k\neq1$) $k=1$ の時、$\theta_k=\frac{\pi}{4}$ となり、$B_1(-1,0)$ となるから $k=1$ でも成立。 $\cdots ⑤$

以上から、$\overline{B_iB_j}$, $\cos 4\theta_k$, $\sin 4\theta$ の分母の全ての積 A とすると、$A\in\mathbb{Z}$ であり、又点 C_k を $\overrightarrow{OC_k}=A\overrightarrow{OB_k}$ によって定めれば、C_k は格子点 ($\because$⑤) であり、$\overline{C_iC_j}\in\mathbb{Z}$ ($\because$④) であり、又 C_k は全て異なる点 ($\because$③) である。$\cdots ⑥$ さらに、C_k は円 $x^2+y^2=A^2$ 上にあり、任意の直線とこの円は高々2点でしか交わらないから、C_k のどの3点も同一直線上にない。$\cdots ⑦$

⑥⑦から、$C_k=A_k$ とすれば、A_k は (C1)〜(C3) をみたす。■

$4(1+st)(t-s)$

$t-ts^2-s+st^2$

$t- \quad st(t-s)$

$2t-2ts^2-2s+2st^2$

$2(t-s)$

$p=\frac{2x}{1-x^2}$

$x^2=p$

st^2

$\frac{1-\cos 2\theta}{2}$

$1-x^2=\frac{2}{p}x$

$4\sin^2\theta=$

$x^2+\frac{2}{p}x-1=0$

$t^2s^2-t^2-s^2+1+4ts$

$2(t^2+s)^2$

$(1+$

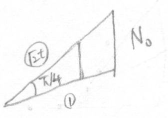
$t^2s^2+t^2+s^2+1-t^2s^2$

$\frac{2u}{1-u^2}$

第 3 問

$4t\left(\frac{1}{\beta}\right)$

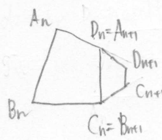
(3)
▷ "すき間なく覆う"を数式化したい…（おそらく解は2つ，逆数的関係）
下のような△をかんがえ，$N_0, N_1, \cdots$ とする。N_0は2辺$\sqrt{80}$，$4\sqrt{10}t$で，
N_k, N_{k+1}の相似比は$1:\sqrt{2}t$だから，N_1の2辺は…　⇒原点で交さない）．
45°ずつ回転する

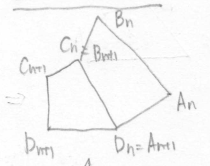


Tこうき 97回

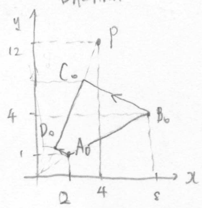
第 3 問

[解] 1° $n \geq 0$の時　　2° $n<0$の時





(1) c_0, $\angle B_0OP = \dfrac{\overrightarrow{OB_0}\cdot\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OB_0}||\overrightarrow{OP}|} = \dfrac{20\cdot 8}{\sqrt{80}\cdot\sqrt{160}}$



$= \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $0<\angle B_0OP<\pi/2$から, $\angle B_0OP = \pi/4$ //

(2) $C_0(4t, 12t)$ ($t \in \mathbb{R}\neq 0$)とおける。この時, $\triangle OA_0D_0$, $\triangle OB_0C_0$の相似から.

$D_0(t, 3t)$とおける。$\overline{A_0B_0} = 3\sqrt{5}$, $\overline{C_0D_0} = 3\sqrt{10}\cdot t$ 及び k_nの定義から.

相似比は $k_n : k_{n+1} = 1 : \dfrac{3\sqrt{10}\cdot t}{3\sqrt{5}} = \underbrace{1 : \sqrt{2}t}_{①}$ であるから, $k_n = k_0$なるnが

ある時, $\sqrt{2}t = 1 \Leftrightarrow t = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ であって. $C_0(2\sqrt{2}, 6\sqrt{2})$ //

この時, 任意のk_nが合同だから.

$$\angle A_nOD_n = \angle B_0OP = \pi/4 \quad \cdots ②$$

が成り立つ。したがって, x軸とOB_0のなす角αとして.

$$A_n\left(\sqrt{5}\cos\left(\alpha + \tfrac{\pi}{4}n\right), \sqrt{5}\sin\left(\alpha + \tfrac{\pi}{4}n\right)\right)$$

$A_n = A_0$の時 $k_n = k_0$となるから. 条件は $n\frac{\pi}{4} = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) つまり

$n \equiv 0 \pmod 8$ //

(3) ②は一般に任意の$t \in \mathbb{R}\neq 0$で成り立つ.(題意より$\triangle OC_kB_k$が相似)

から. tに対して. A_nの座標は ①から

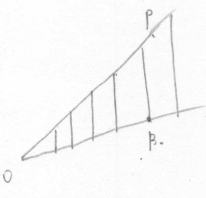
$$|\overrightarrow{OA_{n+1}}| : |\overrightarrow{OA_n}| = \sqrt{2}t = 1,\ |\overrightarrow{OA_0}| = \sqrt{5} \quad \cdots ③$$

であたえられるので, 等比数列の公式から

$$\overrightarrow{OA_n} = \sqrt{5}\cdot(\sqrt{2}t)^n \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \pi/4\cdot n) \\ \sin(\alpha + \pi/4\cdot n) \end{pmatrix}$$

となる。題意の時, 半直線 OB_0, OPにはさまれた領域に, 下図のように

k_nがつまることが, 従って必要となる。



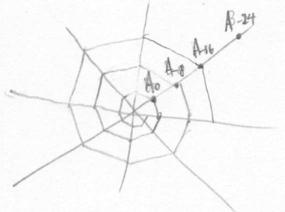
右図でとなりあうk_nの相似比は

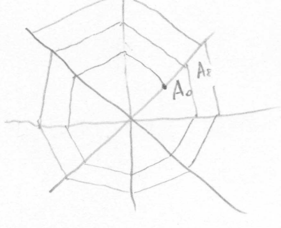
$\overline{A_0D_0} : \overline{B_0C_0} = 1:4$ であることと, ③から.

$n = 8$の時, $(\sqrt{2}t)^8 = 4, \frac{1}{4} \Leftrightarrow t = 2^{-\frac{1}{4}}, 2^{-\frac{3}{4}}$

つまり $C_0(2^{\frac{7}{4}}, 3\cdot 2^{\frac{7}{4}})$, $(2^{\frac{5}{4}}, 3\cdot 2^{\frac{5}{4}})$ が必要. 逆にこの時 //

k_nは右上図のようになって十分





この時Q(100, 50)は直線OB_0上にあり, $\overrightarrow{OQ} = 50\sqrt{5}$ である.

1° $t = 2^{-\frac{1}{4}}$の時

③から $|\overrightarrow{OA_{8n+8}}| = 4|\overrightarrow{OA_{8n}}|$, $|\overrightarrow{OA_0}| = \sqrt{5}$から

$$|\overrightarrow{OA_{8n}}| = \sqrt{5}\cdot 4^n$$

より. これは単調増加で.

$$|\overrightarrow{OA_{16}}| < 50\sqrt{5} < |\overrightarrow{OA_{24}}|$$

と上図から. $n = 15, 16$ //

2° $t = 2^{-\frac{3}{4}}$の時

1°と同じく, $n = -16, -17$

以上まとめて.

$$\begin{cases} C_0(2^{\frac{7}{4}}, 3\cdot 2^{\frac{7}{4}}) \text{の時}\ n = 15, 16 \\ C_0(2^{\frac{5}{4}}, 3\cdot 2^{\frac{5}{4}}) \ \text{〃}\ \ n = -16, -17 \end{cases}$$ //