第1問

[解] $C_1: x^2+(y-10)^2=1$, $C_2: x^2+y^2=4$ より、$0\leq\alpha,\beta<2\pi$ をみたす α,β によって、$Q(\cos\alpha, 10+\sin\alpha)$, $R(2\cos\beta, 2\sin\beta)$ とかける。$S(X,Y)$ とおく。

$\angle QRS=\angle R$ から、$\overrightarrow{RQ}\cdot\overrightarrow{RS}=0$ …① 又、$\overline{QR}^2=\overline{RS}^2$ …② である。

$$\overrightarrow{RQ}=\begin{pmatrix}\cos\alpha-2\cos\beta\\ \sin\alpha+10-2\sin\beta\end{pmatrix}, \overrightarrow{RS}=\begin{pmatrix}X-2\cos\beta\\ Y-2\sin\beta\end{pmatrix} \quad \cdots③$$

で、一方①②から

$$\overrightarrow{RS}=\pm\begin{pmatrix}\sin\alpha-2\sin\beta+10\\ -\cos\alpha+2\cos\beta\end{pmatrix} \quad \cdots④$$

とかける。③④から

$$\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}\cos\beta\\ \sin\beta\end{pmatrix}\pm\begin{pmatrix}\sin\alpha-2\sin\beta+10\\ -\cos\alpha+2\cos\beta\end{pmatrix}$$

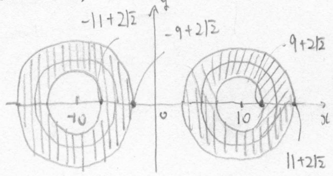
$$=\begin{pmatrix}\sin\alpha\\ -\cos\alpha\end{pmatrix}+2\sqrt{2}\begin{pmatrix}\cos(\beta+\pi/4)\\ \sin(\beta+\pi/4)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}10\\ 0\end{pmatrix} \quad \cdots⑤$$

or

$$\begin{pmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix}+2\sqrt{2}\begin{pmatrix}\cos(\beta-\pi/4)\\ \sin(\beta-\pi/4)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}10\\ 0\end{pmatrix} \quad \cdots⑥$$

⑤の時、(X,Y) は $(2\sqrt{2}-1)^2\leq(X-10)^2+Y^2\leq(1+2\sqrt{2})^2$ を、⑥の時 $(2\sqrt{2}-1)^2\leq(X+10)^2+Y^2\leq(2\sqrt{2}+1)^2$ をえがくから、これらを図示して、右図斜線部(境界含む)

(円の方程式は、複号任意で
$(X\pm10)^2+Y^2=(2\sqrt{2}\pm1)^2$)



(2) C_B, C_2 が一意に定まる、つまり α,β が一意に定まるような C_3 のキセキは、(1)から

$$(X\pm10)^2+Y^2=(2\sqrt{2}\pm1)^2 \quad (複号任意) \quad \cdots⑦$$

である。したがって⑦と C_3 がただ1つ共有点を持つように P_3 を定めれば良い。ここで、
$(X+10)^2+Y^2=(2\sqrt{2}\pm1)^2$ と $l: x+2y=10$ の
キョリは

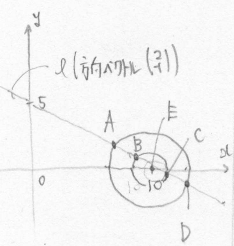
$$L=\frac{|-10-10|}{\sqrt{1+4}}=4\sqrt{5}$$

で、これは $2\sqrt{2}\pm1+\sqrt{2}=3\sqrt{2}\pm1$ よりも大きいから、⑦のうち $(X+10)^2+Y^2=(2\sqrt{2}\pm1)^2$ と l が共有点を持つことはないので、残りの2円について考えれば良い。そこで、

$C_4: (X-10)^2+Y^2=(2\sqrt{2}+1)^2$

$C_5: (X-10)^2+Y^2=(2\sqrt{2}-1)^2$

と定める。又、l と C_4, C_5 の4交点を右上のように A,B,C,D とする。この時 C_3 は A,B,C,D のいずれかで各円と接する。



・A又はDで C_4 と C_3 が内接する、あるいはB,Cで C_5 と C_3 が外接する時

$\overline{AB}=\overline{CD}=2$ で、これが C_3 の直径 $2\sqrt{2}$ より小さいので必ず他の円と交わり不適。

・B又はCで C_3, C_5 が内接する時

$\overline{BC}=4\sqrt{2}-2>2\sqrt{2}$ だから、この時、他の交点は存在せず適する。よって、B,Cからのキョリが $\sqrt{2}$ となるよう適当な l 上の点を定めて、

$$\overrightarrow{EP_3}=(\sqrt{2}-1)\frac{\sqrt{5}}{5}\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix} \text{ or } (\sqrt{2}-1)\frac{\sqrt{5}}{5}\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}$$

だから、

$$P_3\left(10\pm\frac{2\sqrt{5}(\sqrt{2}-1)}{5}, \mp\frac{\sqrt{5}(\sqrt{2}-1)}{5}\right) \quad (複号同順)$$

・A又はDで C_3, C_4 が外接する時

図から明らかに適して、$\overline{AP}=\sqrt{2}$ あるいは $\overline{DP}=\sqrt{2}$ となるようにして、

$$\overrightarrow{EP_3}=(3\sqrt{2}-1)\frac{\sqrt{5}}{5}\begin{pmatrix}\pm2\\ \mp1\end{pmatrix} \quad (複号同順)$$

で

$$P_3\left(10\pm\frac{2\sqrt{5}(3\sqrt{2}-1)}{5}, \mp\frac{\sqrt{5}(3\sqrt{2}-1)}{5}\right) \quad (複号同順)$$

となる

以上で全ての場合が尽くされ、もとめる点は、以下複号同順として

$$P_3\left(10\pm\frac{2\sqrt{5}(\sqrt{2}-1)}{5}, \mp\frac{\sqrt{5}(\sqrt{2}-1)}{5}\right), P_3\left(10\pm\frac{2\sqrt{5}(3\sqrt{2}-1)}{5}, \mp\frac{\sqrt{5}(3\sqrt{2}-1)}{5}\right)$$

//

第 2 問

[解] $0<r,\ 0\leq\theta\leq\pi/4$ …①

(1) (E)を変形して、

$$\int_0^{2\pi}\{(f(x))^2-2f(x)\sin x\}dx=0 \quad \cdots ②$$

であり、ここで

・$\displaystyle\int_0^{2\pi}\{f(x)\}^2dx=r^2\int_0^{2\pi}\sin^2(x+\theta)dx$

$\displaystyle=\frac{r^2}{2}\Big[(x+\theta)-\frac{1}{2}\sin2(x+\theta)\Big]_0^{2\pi}=\pi r^2$ …③

・$\displaystyle\int_0^{2\pi}f(x)\sin x\,dx=\frac{r}{2}\int_0^{2\pi}\{-\cos(2x+\theta)+\cos\theta\}dx$

$\displaystyle=\frac{r}{2}\big[x\cdot\cos\theta\big]_0^{2\pi}$ (∵ $\cos2x$は周期πの周期関数)

$=\pi r\cos\theta$ …④

だから、③④を②に代入して

$\pi r^2=2\pi r\cos\theta$

①から、$r=2\cos\theta$ //

(2) (1)から、rを①に代入して

$0<2\cos\theta$

だが、これは$0\leq\theta\leq\pi/4$では常に成立。よって、

$f(x)=2\cos\theta\cdot\sin(x+\theta)$ $\quad(0\leq\theta\leq\pi/4,\ 0\leq x\leq\pi$ …⑤)

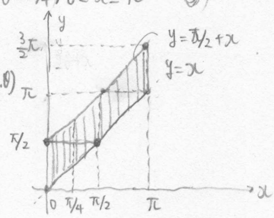
のキセキを求めれば良い。

$f(x)=\sin(2\theta+x)+\sin x\equiv g(x,\theta)$

であり、xを固定してかんがえると、⑤から

$x\leq2\theta+x\leq x+\pi/2$

だから右図より



($2\theta+x$の存在領域 境界含む)

$0\leq x\leq\pi/4$の時、
$\quad g(x,0)\leq g(x,\theta)\leq f(x)\big|_{2\theta+x=\pi/2}$

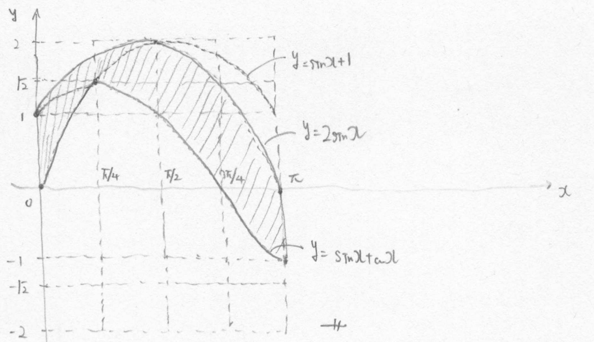
$\pi/4\leq x\leq\pi/2$の時
$\quad g(x,\pi/4)\leq g(x,\theta)\leq f(x)\big|_{2\theta+x=\pi/2}$

$\pi/2\leq x\leq\pi$の時、
$\quad g(x,\pi/4)\leq g(x,\theta)\leq g(x,0)$

であり、

$g(x,0)=2\sin x$
$g(x,\pi/4)=\sin x+\cos x$
$f(x)\big|_{2\theta+x=\pi/2}=\sin x+1$

から、図示すると右上図斜線部(境界含む)。



//

(3) 面積Sとして上図から

$$S=\int_0^{\pi/2}(1+\sin x)dx+\int_{\pi/2}^{\pi}(2\sin x)dx-\int_0^{\pi/4}(2\sin x)dx-\int_{\pi/4}^{\pi}(\sin x+\cos x)dx$$

$$=\int_0^{\pi/2}dx+\int_{\pi/2}^{3\pi/4}(2\sin x)dx-\int_{\pi/4}^{\pi}\cos x\,dx-\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sin x\,dx \quad (∵対称性) \quad \cdots ⑥$$

であり

$\displaystyle\int_0^{\pi/2}dx=\frac{\pi}{2}$

$\displaystyle2\int_{\pi/2}^{\frac{3}{4}\pi}\sin x\,dx=2\big[-\cos x\big]_{\pi/2}^{\frac{3}{4}\pi}=\sqrt{2}$

$\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi}\cos x\,dx=\big[\sin x\big]_{\pi/4}^{\pi}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sin x\,dx=\big[-\cos x\big]_{\pi/4}^{\pi/2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

を⑥に代入して

$S=\dfrac{\pi}{2}+\sqrt{2}$ //