第1問

[解] (1) 1つの玉がどの箱に入るかかんがえて 3^n //

(2) nコのボールと、2本のしきりのならべ方をかんがえて.

$${}_{n+2}C_2 = \frac{1}{2}(n+2)(n+1) \quad //$$

(3) 以下のように場合分けする.

1° 1つの箱にしか玉が入らない … 1通り

2° otherwise

全ての箱を区別すると 3^n-3 通り. だから、箱の区別をなくすと $\frac{3^n-3}{3!} = \frac{3^{n-1}-1}{2}$ 通り … ☆

以上から $1+\frac{3^{n-1}-1}{2} = \frac{3^{n-1}+1}{2}$ 通り //

(4) 3コの箱の内の玉の数を X, Y, Z とおく. $X+Y+Z=6m$ … ① である.

$X \geqq Y \geqq Z$ とする

$X=Y=Z$ をみたす … α通り

$X=Y>Z$ or $X>Y=Z$ をみたす … β通り

$X>Y>Z$ をみたす … γ通り

とおくと、(2)から

$$\alpha + 3\beta + 6\gamma = \frac{1}{2}(n+2)(n+1) \quad \cdots ②$$

又、$\alpha=1$ … ③ であり、βは、$(6m,0,0)(6m-2,1,1)\cdots(2m+2,2m-1,2m-1)$

$(2m+1,2m+1,2m-2)\cdots(3m,3m,0)$ の計 $2m+m=3m$ 通り

だから、②③より

$$\gamma = \frac{1}{6}\left[\frac{1}{2}(n+2)(n+1)-1-9m\right]$$

なので、もとめる場合の数は

$$\alpha+\beta+\gamma = \frac{1}{6}\left[6+18m+\frac{1}{2}(n+2)(n+1)-1-9m\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{1}{2}(n+2)(n+1)+\frac{3}{2}n+5\right]$$

$$= \frac{1}{12}\left[n^2+6n+12\right] \quad //$$

[別]

☆のかぞえ方として、(4)と同じようにも出来る

1箱にしか入れない … α通り

otherwise … β通り

とおくと

$$3\alpha+6\beta=3^n$$

だから、$\alpha=1$として

$$\alpha+\beta = 1+\frac{3^n-3}{6} = \frac{3^{n-1}+1}{2}$$

$3m-1,\ 3m-1,\ 2$

$2m+1\ \ 2m+1\ \ 2m-2$

$3m-1-2m$

6

1.1.4

$m=1$

$2m,\ 2m,\ 2m$

$n=6m$

$9m$

$\frac{3}{2}n$

$3\left(\frac{n}{6}\right)^2+3\left(\frac{n}{6}\right)+1$

$\frac{n^2}{12}+\frac{n}{2}+1$

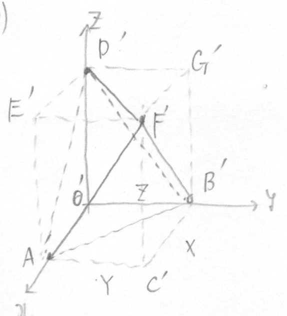
/20

第　　問

/20

第2問

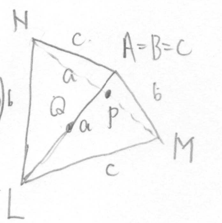
[解] 中点連結定理から、$MN=a$, $ML=c$, $NL=b$ であり、3辺相等から $\triangle AMN \equiv \triangle MCL \equiv \triangle NLB \equiv \triangle LNM$ である。ここで座標空間において、8点 $O(0,0,0)$ $A'(X,0,0)$ $B'(0,Y,0)$, $C'(X,Y,0)$, $D'(0,0,Z)$, $E'(X,0,Z)$ $F'(X,Y,Z)$, $G'(0,Y,Z)$ を考える。$(X,Y,Z>0)$



$$\begin{cases} A'F' = B'D' = \sqrt{Y^2+Z^2} \\ B'F' = A'D' = \sqrt{X^2+Z^2} \\ A'B' = D'F' = \sqrt{X^2+Y^2} \end{cases}$$

より、四面体$A'F'D'B'$の4面は全て合同な三角形である。

したがって、$a=\sqrt{Y^2+Z^2}$, $b=\sqrt{X^2+Z^2}$, $C=\sqrt{X^2+Y^2}$ …① となるよう X,Y,Zを設定し、F'を$A(=B=C)$, D'をN, A'をL, B'をMでおきかえて考えれば良い(このようなX,Y,Zは存在する:⑤)。



この時、$Q(X, \frac{1}{2}Y, \frac{1}{2}Z)$、
$P(0, \frac{1}{2}Y, \frac{1}{2}Z)$ …②

(1) ②から $\overline{PQ}=X$ …③ である。又①から

$$X^2 = \frac{1}{2}(-a^2+b^2+c^2)$$

$$\therefore X = \sqrt{\frac{1}{2}(-a^2+b^2+c^2)} \quad \cdots ④$$

($X>0$, 余弦定理から $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\angle NAM$, $\angle NAM$は鋭角で $\cos\angle NAM>0$, $b,c>0$で $a^2<b^2+c^2$ …⑤ 他のY,Zについても同様のギロンで求めることができる)

したがって③,④から $\overline{PQ}=\sqrt{\frac{1}{2}(-a^2+b^2+c^2)}$ //

(2) 四面体の体積Vは立方体の体積からまわりの4つの三角錐の体積を引いたもの

$$V = XYZ - 4\cdot\frac{1}{6}XYZ = \frac{1}{3}XYZ \quad \cdots ⑥$$

⑤から、④と同じく、

$$Y=\sqrt{\frac{1}{2}(+a^2-b^2+c^2)}, \quad Z=\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2)}$$

だから、⑥に代入して

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)}$$ //

[別解(入り切らないかも…)]

第 3 問

[解] タンクの半径R、横行きL、流出開始を起点として.

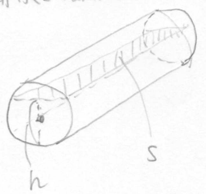
時刻tにおける水面の高さh,

水面の面積Sと流出速度vとする.

題意から $v \propto \sqrt{h}$ だから比例

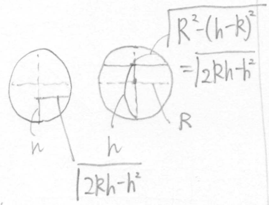
定数kとして

$$v = k\sqrt{h} \quad \cdots ①$$



とおける. 一方, 流出する水に関して,

$$v = -S\frac{dh}{dt} \quad \cdots ②$$



が成り立つ。さらに, S, hの間の関係式として

$$S = 2\sqrt{2Rh-h^2}\cdot L \quad \cdots ③$$

が成り立つ. ①,③を②に代入して,

$$k\sqrt{h} = -2\sqrt{2Rh-h^2}\cdot L\frac{dh}{dt}$$

$h \neq 0$の時

$$k\,dt = -2L\sqrt{2R-h}\,dh$$

積分して

$$-\frac{k}{2L}t = -\frac{2}{3}(2R-h)^{\frac{3}{2}} + C \quad \cdots ④$$

ただし, Cは初期条件による定数。初期条件 $t=0$で$h=2R$から, $C=0$

さらに題意から, $t=1[h]$ で $h=R$だから

$$\frac{k}{2L} = \frac{2}{3}R^{\frac{3}{2}} \quad \cdots ⑤$$

以下, このもとで $h=0$ になる時の t をもとめる。④から$h=0$の時 $t=t_0$と

して …☆

$$\frac{k}{2L}t_0 = \frac{2}{3}(2R)^{\frac{3}{2}} \quad \cdots ⑥$$

⑤,⑥の辺々わって,

$$t_0 = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$$

したがって, もとめる時間Tは

$$T = t_0 - 1 = 2\sqrt{2} - 1 \quad \cdots ⑦$$

ここで, $(1.414)^2 = 1.999396 < 2$, $(1.415)^2 = 2.002225 > 2$から

$$1.414 < \sqrt{2} < 1.415$$

⑦に代入して

$$1.828 < T_0 < 1.83 \quad \cdots ⑧$$

であり, $0.828 \times 60 = 49.68$, $0.83 \times 60 = 49.8$ と⑧から.

1時間49.68分 < T_0 < 1時間49.8分

したがって, 1時間49分 //

(関数は連続で, $h=0$でも成立)