30

第1問

[解] $_nC_k$の性質から. $_{n+1}C_{k+1} = {}_nC_k + {}_nC_{k+1}$ である …①

(1) ①から

$$P_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} {}_{n+1}C_{3k} = \sum_{k=0}^{n+1} ({}_nC_{3k} + {}_nC_{3k-1})$$

$$= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_{3k} + \sum_{k=0}^{n} {}_nC_{3k+2} = P_n + R_n \quad /\!/$$

同様にして. $Q_{n+1} = P_n + Q_n$, $R_{n+1} = R_n + Q_n$ //

(2) (1)から

$$\begin{cases} P_{n+1} = P_n + R_n \\ Q_{n+1} = P_n + Q_n \\ R_{n+1} = Q_n + R_n \end{cases}$$

又,2項係数の性質から. $P_n+Q_n+R_n = 2^n$だから. R_nを消して

$$\begin{cases} P_{n+1} = 2^n - Q_n & \cdots ② \\ Q_{n+1} = P_n + Q_n & \cdots ③ \end{cases}$$

②を③に代入

$$Q_{n+2} = Q_{n+1} - Q_n + 2^n \quad \cdots ④$$

$a_n = \frac{Q_n}{2^n}$とおいて.④に代入 … $*_1$

$$a_{n+2} = \frac{1}{2}a_{n+1} - \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}$$

変形して. $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$; $A = \frac{3-\sqrt{3}i}{12}$, $B = \frac{3+\sqrt{3}i}{12}$ とおくと.

$$\begin{cases} a_{n+2} + \frac{\omega^2}{2}a_{n+1} - A = \frac{-\omega}{2}\left(a_{n+1} + \frac{\omega^2}{2}a_n - A\right) \\ a_{n+2} + \frac{\omega}{2}a_{n+1} - B = \frac{-\omega^2}{2}\left(a_{n+1} + \frac{\omega}{2}a_n - B\right) \end{cases} \cdots ⑤$$

$Q_0 = 0$ $Q_1 = 1$ より. $a_0 = 0$, $a_1 = \frac{1}{2}$ だから. ⑤と等比数列の公式から

$$\begin{cases} a_{n+1} + \frac{\omega^2}{2}a_n - A = \left(\frac{-\omega}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2} - A\right) \\ a_{n+1} + \frac{\omega}{2}a_n - B = \left(-\frac{\omega^2}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2} - B\right) \end{cases} \cdots ⑥$$

整理して

$$\begin{cases} a_{n+1} + \frac{\omega^2}{2}a_n - A = \left(\frac{-\omega}{2}\right)^n \left(\frac{-\sqrt{3}i}{6}\right)\cdot\omega = \frac{\sqrt{3}i}{3}\left(\frac{-\omega}{2}\right)^{n+1} \\ a_{n+1} + \frac{\omega}{2}a_n - B = \left(-\frac{\omega^2}{2}\right)^n \left(\frac{\sqrt{3}i}{6}\right)\omega^2 = \frac{-\sqrt{3}i}{3}\left(-\frac{\omega^2}{2}\right)^{n+1} \end{cases}$$

辺々引いて.整理

$$\left(\frac{\omega^2}{2} - \frac{\omega}{2}\right)a_n = \frac{\sqrt{3}i}{3}\left[+\left(\frac{-\omega}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{-\omega^2}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{2}\right]$$

$$a_n = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{2} - \left(\frac{-\omega^2}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{-\omega}{2}\right)^{n+1}\right]$$

$*_1$から

$$Q_n = \frac{1}{3}\left[2^n - (-\omega^2)^{n+1} - (-\omega)^{n+1}\right] \quad \cdots ⑦$$

②から$n \geq 1$の時.

$$P_n = 2^{n-1} - Q_{n-1}$$

$$= \frac{1}{3}\left[3\cdot 2^{n-1} - 2^{n-1} + (-\omega^2)^n + (-\omega)^n\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[2^n + (-\omega^2)^n + (-\omega)^n\right]$$

$n=0$の時. $P_0 = 1$で. この式で良い。したがって. $P_n+Q_n+R_n = 2^n$から

$$R_n = 2^n - P_n - Q_n$$

$$= \frac{1}{3}\left[3\cdot 2^n - 2^n - (-\omega^2)^n - (-\omega)^n - 2^n + (-\omega^2)^{n+1} + (-\omega)^{n+1}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left(2^n + \omega(-\omega^2)^n + \omega^2(-\omega)^n\right)$$

以上から

$$\begin{cases} P_n = \frac{1}{3}\left(2^n + \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^n\right) \\ Q_n = \frac{1}{3}\left(2^n - \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^n\right) \\ R_n = \frac{1}{3}\left(2^n + \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^n - \frac{1+\sqrt{3}i}{2}\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^n\right) \end{cases} /\!/$$

(3) $Q_{12} = \frac{1}{3}\left(2^{12} - (-\omega^2)^{13} - (-\omega)^{13}\right)$

$$= \frac{1}{3}\left(2^{12} + \omega^{26} + \omega^{13}\right) = \frac{1}{3}(4096 - 1) = 1365 \quad /\!/$$

$P_{12} = \frac{1}{3}\left(2^{12} + (-\omega^2)^{12} + (-\omega)^{12}\right)$

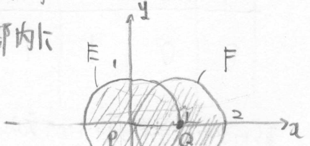
$$= \frac{1}{3}\left(2^{12} + \omega^{24} + \omega^{12}\right) = \frac{1}{3}(4096 + 2) = 1366 \quad /\!/$$

$R_{12} = 2^{12} - P_{12} - Q_{12} = 1365$ //

第２問

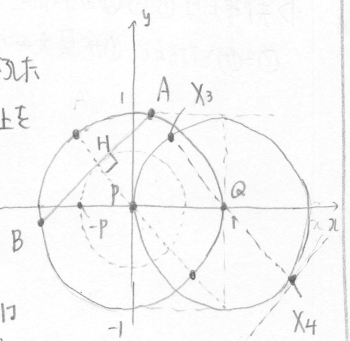
[解] $\overline{PQ}=1$ …① から、P(0,0) Q(1,0) とし、△ABC が xy 平面にあるとする。(条件)をみたす時、

A,B,C は右図斜線部内にある。



(1) もし A,B,C が右図斜線部で境界を含まない部分にあるとする。C から AB に下ろした垂線と E,F との交点のうち、垂足 H との距離が $\overline{CH}$ よりも大なるもの C' が存在し △ABC < △ABC' となる。したがって、△ABC が最大の時 C は E又はFにある。他の頂点についても同様のことがいえるから、題意は示された。□

(2) P を固定した時、AB に P から下ろした垂足 H とすると、H は $x^2+y^2=p^2$ 上を動く。この時、円の中心に関する対称性から、$\overline{AB}$ は一定だから、この時、E,F 上で AB からの距離が最も大なる点が C の時、△ABC は最大である。そこで $\overrightarrow{PH}=\binom{c}{s}$



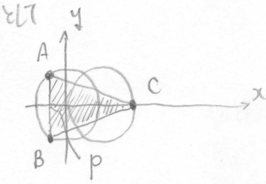
$\binom{c}{s}$ とおく。($c=\cos\theta$, $s=\sin\theta$, $0\leq\theta<2\pi$) と…の点での円の接線の法線ベクトルも $\binom{c}{s}$ となる。このような点は E 上に 2点、F 上に 2点あるので、これを順に X_1, X_2, X_3, X_4 とすると、HX_1, HX_2 は $1+p$, $1-p$ である。以下 X_3, X_4 について考える。対称性から $X_3(1+c, s)$, $X_4(1-c, -s)$ としてよく、これと線分 AB との距離 L_3, L_4 とすると、AB の方程式は $cx+sy=p$ だから

$$L_3=|c(1+c)+s^2-p|=|1-p+c|$$

$$L_4=|c(1-c)-s^2-p|=|-1-p+c|$$

であり、$0\leq p\leq 1$, $-1\leq c\leq 1$ とあわせて L_3, L_4 のうち最大のものは L_4 において $c=-1$ とした $\max L_4=(p+2)$ である。この時、$\theta=\pi$ となって、たしかに $PQ\perp AB$ である□

(3) (2)から、P を固定した時 S を最大にするのは △ABC が右図のようになる時。この面積 $S(p)$ として



$$S(p)=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{1-p^2}\,(p+2)$$

$$=\sqrt{(1-p^2)(p+2)^2}\equiv\sqrt{f(p)}$$

さて、次に p をうごかす。

$$f'(p)=2(p+2)(1-p^2)-2p(p+2)^2$$

$$=2(p+2)(1-2p-2p^2)=$$

より下表を得る

p	0		$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$		1
f'		+	0	−	
f		↗		↘	

したがって、

$$\max S=\sqrt{\max f(p)}$$

$$=\sqrt{f\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)}=\sqrt{\frac{1+2p}{2}\cdot\frac{3+\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3+\sqrt{3}}{2}}\ //$$

[別解(2)]

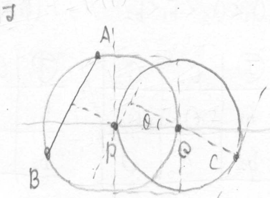
AB と PQ のなす角 θ とする。AB と平行に F の接線を引き、接点 C とする。右図から、AB と C の距離 h は

$$h=p+\sin\theta+1$$

$\overline{AB}=\text{const}$, $p=\text{const}$ から、

△ABC が最大になるとき

h が最大で $\theta=\pi/2$ □



第 3 問

▷ Aの2枚 a_1, a_2 / Bの2枚 b_1, b_2 とおく. $(k_1 < k_2)$. 大小は以下の通り (Aが勝ったら○)

㋐

	a_1	a_2
b_1	×	×
b_2	×	×

$(a_1 < a_2 < b_1 < b_2)$

㋑

	a_1	a_2
b_1	×	○
b_2	×	×

$(a_1 < b_1 < a_2 < b_2)$

㋒

	a_1	a_2
b_1	×	○
b_2	×	○

$(a_1 < b_1 < b_2 < a_2)$

㋓

	a_1	a_2
b_1	○	○
b_2	×	○

$(b_1 < a_1 < b_2 < a_2)$

㋔

	a_1	a_2
b_1	○	○
b_2	×	×

$(b_1 < a_1 < a_2 < b_2)$

㋕

	a_1	a_2
b_1	○	○
b_2	○	○

$(b_1 < b_2 < a_1 < a_2)$

(1) ㋐, ㋕の時はかわらない. ここで. 以下のことに注

☆ Bは1回目で勝つか負けるかえらべる時. 勝ちをえらんでくる

(強い札を温存するだけがない)

㋑の時. かわらない, ㋒の時. かわらない, ㋓の時. かわらない

(負ける時は弱い札を放出), ㋔の時も同じ

⇒ 結局どっちからで良い

(2) ▷ (1)から. ㋐〜㋕での得点は以下

ア	イ	ウ	エ	オ	カ
0	0	1	1	1	2

あとは各々の場合の数をかぞえれば良いが. 14コの中から4つえらんで.

大小を1通り定めれば良いから. ${}_{14}C_4$ 通り. である

(実際. 全部で ${}_{14}C_2 \cdot {}_{12}C_2 = \dfrac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{2 \cdot 2} = 6 \cdot {}_{14}C_4$)

(3) ▷ 和が14 … (1, 13) (2, 12) (3, 11) (4, 10) (5, 9)

(6, 8)

⇒ それぞれ. ㋐〜㋕が何通りになるか算すれば答えは出る.

▷ 実際には. ㋐. ㋑. ㋔が問題 (ここで得点に差がでる) だが.

㋑=㋔となるので: ㋐が最大 ⟺ ㋓が最小 となる.

第 3 問

[解] A, Bの手持ちの2枚を a_1, a_2, b_1, b_2 とする ($a_1<a_2, b_1<b_2$)

この大小関係は以下のいずれか

㋐ $a_1<a_2<b_1<b_2$　　㋓ $b_1<a_1<b_2<a_2$

㋑ $a_1<b_1<a_2<b_2$　　㋔ $b_1<a_1<a_2<b_2$

㋒ $a_1<b_1<b_2<a_2$　　㋕ $b_1<b_2<a_1<a_2$

Bは、1回目に札を出す時、以下の《ルール》に従う。

《ルール》
- Aが出した札に勝つ札を持っている時、そのような札のうち、もっとも小さい札を出す。
- Aが出した札に勝つ札がない時、もっとも小さい札を出す

…※1

したがって、たとえば㋓では、a_1, a_2 を1枚目に出す時、Aの得点は

$$\begin{cases} a_1 \to b_2 \to a_2 \to b_1 \text{ で 1点} \\ a_2 \to b_1 \to a_1 \to b_2 \text{ で 1点} \end{cases}$$

のようになる。他のタイプの時も同様にして ㋐～㋕ でのAの得点は1枚目に出す枚によらず 以下のようになる
#(1)

タイプ	㋐	㋑	㋒	㋓	㋔	㋕
点	0	0	1	1	1	2

…①

㋐～㋕ までのタイプになる確立は、a_1, a_2, b_1, b_2 の対称性からいずれも $\frac{1}{6}$ だから、(2)でもとめる期待値Eは

$$E=\frac{1}{6}(0+0+1+1+1+2)=\frac{5}{6} \quad \text{\# (2)}$$

(3) $a_1+a_2=14$ の時、(a_1, a_2) と、それに対応する㋐～㋕までの場合の数は下のようになる

	(a_1,a_2)	㋐	㋑	㋒	㋓	㋔	㋕
1°	(1, 13)	0	0	${}_{11}C_2$	0	0	0
2°	(2, 12)	0	9	${}_{9}C_2$	9	1	0
3°	(3, 11)	1	14	${}_{7}C_2$	14	4	1
4°	(4, 10)	${}_{3}C_2$	15	${}_{5}C_2$	15	9	${}_{3}C_2$
5°	(5, 9)	${}_{4}C_2$	12	${}_{3}C_2$	12	16	${}_{4}C_2$
6°	(6, 8)	${}_{5}C_2$	5	0	5	25	${}_{5}C_2$

したがって ①とあわせて、各々の時の期待値は右上表のようになる

(b_1, b_2 のえらび方は ${}_{11}C_2$ で同様にたしからしい)

	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7
期待値	1	$\frac{{}_{11}C_2-9}{{}_{11}C_2}$	$\frac{{}_{11}C_2-14}{{}_{11}C_2}$	$\frac{{}_{11}C_2-15}{{}_{11}C_2}$	$\frac{{}_{11}C_2-12}{{}_{11}C_2}$	$\frac{{}_{11}C_2-5}{{}_{11}C_2}$	

したがって、

最小…(4, 10)の時、$E=1-\frac{15}{{}_{11}C_2}=\frac{8}{11}$ #

最大…(1, 12)の時、$E=1$ #

$\frac{2\cdot 15}{12\cdot 11}$　$\frac{\cancel{2\cdot 15}}{11\cdot 10}$　$\frac{17}{22}$　$\frac{12\cdot 11}{2}$　$\frac{10\cdot 9}{2}$　$\frac{2}{12\cdot 11}$　$1-\frac{18}{66}$　$45+19$　64　$\frac{3}{11}$

${}_{11}C_2-2\cdot{}_3C_2-15$
$+2\cdot{}_3C_2$

$a_1<b_1<b_2<a_2$
3　11

$b_1<a_1<b_2<a_2$
2　3　11

$b_1<a_1<a_2<b_2$
2　3　11　2

4　b_1　10　b_2
5　3

2