# 第1問

[解] (1) 帰納法で示す. $m=1$の時は明らかなので. $m=l\in\mathbb{N}$での成立を仮定し, $m=l+1$での成立を示す.

$$[l+1, l, \cdots 1]_{l+1} = (l+1)\cdot(l+1)! + (l+1)! - 1 \quad (\because 仮定)$$
$$= (l+2)! - 1$$

より. $m=l+1$でも成立. 以上から示された。

(2) $B_m=[a_m,\cdots a_1]_m$ とおく.「$B_m$が$(m+1)!-1$以下の全ての非負整数を表すことが出来る …① が任意の$m\in\mathbb{N}$で成立すること」…② を帰納的に示す. $m=1$の時の①の成立は明らかなので. $m=l$での成立を仮定し, $m=l+1$での成立を示す.

$$B_{l+1} = a_{l+1}(l+1)! + B_l$$

であり. $a_{l+1}=0,1,\cdots,l+1$である. 以下 $a_{l+1}=k\ (k=0\cdots l+1)$の時.

$k(l+1)! \leq B_{l+1} \leq (k+1)(l+1)!-1$ なる全てのセイスウを$B_{l+1}$が表すことを示す. 仮定から. $B_l$は0以上$(l+1)!-1$以下の全てのセイスウを表すから. これは明らか. したがって. $k$をうごかせば. $m=l+1$での①の成立が示された.

以上から. ②が成立する. したがって. 題意は示された。

(3) $\frac{n!}{5}=4!(5+1)\cdots(n-1)+1$である。$n=5$の時. $\frac{5!}{5}=[1.0.0.0]_4$である.

$n\geq 6$の時を考える. そこで. $m\in\mathbb{N}$とおく.

1° $n=5m$の時

$$\frac{n!}{5} = m(5m-1)! = \frac{n}{5}\cdot(n-1)! \text{ より } [\tfrac{n}{5}, 0, 0\cdots]_{n-1}$$

2° $n=5m+1$の時

$$\frac{n!}{5} = (5m+1)\cdot m\cdot(5m-1)! = m(5m)! + m(5m-1)! =$$
$$= \left[\frac{n-1}{5}, \frac{n-1}{5}, 0\cdots\right]_{n-1}$$

3° $n=5m+2$の時

$$\frac{n!}{5} = (5m+2)(5m+1)\cdot m\cdot(5m-1)! = m\cdot(5m+1)! + 2m\cdot(5m)! + 2m\cdot(5m-1)!$$
$$= \left[\frac{n-2}{5}, \frac{2(n-2)}{5}, \frac{2(n-2)}{5}, 0\cdots\right]_{n-1}$$

4° $n=5m+3$の時

$$\frac{n!}{5} = (5m+3)(5m+2)(5m+1)\cdot m\cdot(5m-1)!$$
$$= m\cdot(5m+2)! + (3m+1)(5m+1)! + m(5m)! + m(5m-1)!$$
$$= \left[\frac{n-3}{5}, \frac{3n-4}{5}, \frac{n-3}{5}, \frac{n-3}{5}, 0\cdots\right]_{n-1}$$

5° $n=5m+4$の時

$$\frac{n!}{5} = (5m+4)(5m+3)(5m+2)(5m+1)\cdot m\cdot(5m-1)!$$
$$= 4m(5m+3)! + (4m+2)(5m+2)! + 2m(5m+1)! + 4m(5m)! + 4m(5m-1)!$$
$$= \left[\frac{n-4}{5}, \frac{4n-6}{5}, \frac{2n-8}{5}, \frac{4n-16}{5}, \frac{4n-16}{5}, 0\cdots 0\right]_{n-1}$$

以上から 剰余系の法を5として

$$\frac{n!}{5} = \begin{cases} [\frac{n}{5}, 0, \cdots 0]_{n-1} & (n\equiv 0) \\ [\frac{n-1}{5}, \frac{n-1}{5}, 0\cdots 0]_{n-1} & (n\equiv 1) \\ [\frac{n-2}{5}, \frac{2n-4}{5}, \frac{2n-4}{5}, 0\cdots 0]_{n-1} & (n\equiv 2) \\ [\frac{n-3}{5}, \frac{3n-4}{5}, \frac{n-3}{5}, \frac{n-3}{5}, 0\cdots 0]_{n-1} & (n\equiv 3) \\ [\frac{n-4}{5}, \frac{4n-6}{5}, \frac{2n-8}{5}, \frac{4n-16}{5}, \frac{4n-16}{5}, 0\cdots 0]_{n-1} & (n\equiv 4) \end{cases}$$

//

$3\frac{n-3}{5}+1$

$(6+1)(5+1)$

$6+5+1$

$\frac{n-2}{5}$

$\frac{n-1}{5}=m$

$(5m+2)(5m+1)\cdot m + 2(5m+1)\cdot m$

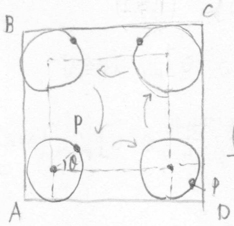
$5m(5m+1)\cdot m$

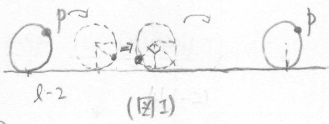
$+2$

$m\ 2.5m+2m$

# 第 2 問

▷ 回転角を考える




(図1)

まず、辺長の時、$l-2$の長さだけ円板が回転する。

① 辺を全て一直線上にうつす考え方

図1からもわかる通り、1回の角での移動で $+\frac{\pi}{2}$ 回転するから

総回転角は $L = 4(l-2) + \frac{3}{2}\pi$

一方、たとえば図のように $\theta$ をおくと辺ABからみた位相は $+\frac{\pi}{2}+\theta$

⇒したがって、これらが一致する条件は位相差 $2\pi$ のセイスウ倍!

(転がった時の位相) $= \theta - L$
(BAからみたPの位相) $= \frac{\pi}{2} + \theta$
差が $2n\pi$!

$\cancel{\theta} - L = 2n\pi + \frac{\pi}{2} + \cancel{\theta}$

$4(l-2) + \frac{3}{2}\pi = 2n\pi$

⇒ オワリ

② 直接かんがえると…

Pにインクがあるとでもしてみるとわかりやすい。

# 第２問

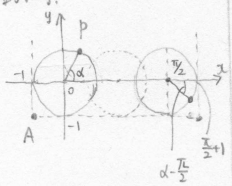
[解] (1) Pは、円が1周する間、$4(l-2)$だけ転がる。したがって、Pが一周まわっても一致する時、$4(l-2)$が$2\pi$の整数倍。$n\in\mathbb{Z}$として、

$$4(l-2)=2n\pi \quad \therefore\ l=\frac{n}{2}\pi+2$$

//

(2) $l>2$から、(1)をみたす$l$の最小値は$n=1$の$l=\frac{1}{2}\pi+2$である。正方形の4頂点A〜Dとし、PがA→B→C→Dの方向に動くとする。まず、AB上を動く時、

右のように$A(-1,-1)$、$B(\frac{\pi}{2}+1,-1)$とし、はじめ$P(\cos\alpha,\sin\alpha)$だとする。$(-2\pi<\alpha\leq 0)$ 円が$\theta$だけ転がった時の座標は




$$\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}\theta\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos(\alpha-\theta)\\ \sin(\alpha-\theta)\end{pmatrix}\quad (0\leq\theta\leq\pi/2)$$

だから、この時のPの軌跡の長さ$l_1$は

$$l_1=\int_0^{\pi/2}\sqrt{(1+\sin(\alpha-\theta))^2+(\cos(\alpha-\theta))^2}\,d\theta$$
$$=\int_0^{\pi/2}\sqrt{2\{1+\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha+\theta)\}}\,d\theta$$
$$=2\int_0^{\pi/2}\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}+\frac{\theta}{2}\right)\right|d\theta \quad \cdots①$$

B→Cの時、$\alpha$を$\alpha-\pi$でおきかえて、この時のPの軌跡の長さ$l_2$は

$$l_2=2\int_0^{\pi/2}\left|\cos\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{\alpha}{2}+\frac{\theta}{2}\right)\right|d\theta \quad \cdots②$$

C→Dの時、$\alpha$を$\alpha-2\pi$でおきかえ、D→Aの時は$\alpha$を$\alpha-3\pi$でおきかえたものだから、対称性から軌跡の長さは各々$l_1$、$l_2$だから、合計の軌跡の長さLは、$L=2(l_1+l_2)$である。①、②から、

$$l_1=4\int_{\pi/4}^{\pi/2}\left|\cos\left(t-\frac{\alpha}{2}\right)\right|dt \quad \left(t=\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$$
$$l_2=4\int_{\pi/4}^{\pi/2}\left|\sin\left(t-\frac{\alpha}{2}\right)\right|dt$$

だから、

$$\frac{1}{8}L=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\left\{\left|\cos\left(t-\frac{\alpha}{2}\right)\right|+\left|\sin\left(t-\frac{\alpha}{2}\right)\right|\right\}dt$$

である。$p=-\frac{\alpha}{2}$とおく。$(0\leq p<\pi)$

$$\frac{1}{8}L=\int_p^{\pi/4+p}\{|\cos t|+|\sin t|\}dt \quad \cdots③$$

$y=|\cos t|+|\sin t|$は周期$\pi/2$の周期関数だから、$0\leq p\leq\pi/2$で考えれば良い。

$0\leq t\leq\frac{3}{4}\pi$では$|\sin t|=\sin t$だから、

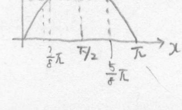
$$\frac{1}{8}L=\begin{cases}\displaystyle\int_p^{p+\pi/4}(\cos t+\sin t)\,dt & (0\leq p\leq\pi/4)\\ \displaystyle\int_p^{\pi/2}(\cos t+\sin t)\,dt+\int_{\pi/2}^{\pi/4+p}(-\cos t+\sin t)\,dt & (\pi/4\leq p\leq\pi/2)\end{cases} \quad \cdots④$$

であるから、

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{L}{8}\right)=\begin{cases}\sqrt{2}\sin(p+\pi/2)-\sqrt{2}\sin(p+\pi/4) & (0\leq p\leq\pi/4)\\ -\sqrt{2}\sin(p+\pi/4)+\sqrt{2}\sin p & (\pi/4\leq p\leq\pi/2)\end{cases} \quad \cdots⑤$$

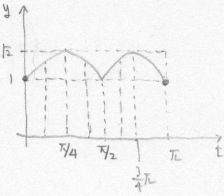
となる。$y=\sin x$のグラフから、下表をうる。

| $p$ | $0$ | | $\frac{1}{8}\pi$ | | $\frac{3}{8}\pi$ | | $\pi/2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $L'$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ |
| $L$ | ↗ | ↗ | | ↘ | | ↗ | |




したがって、最大値は$p=\frac{1}{8}\pi$ 又は $p=\frac{1}{2}\pi$ の時にとる。
最小値は$p=0$ 又は $p=\frac{3}{8}\pi$

ここで$\frac{1}{8}L$は、$y=|\sin t|+|\cos t|$、$t=p$、$t=p+\frac{\pi}{4}$とx軸の囲む面積で、グラフは右図だから、




$p=\frac{1}{2}\pi$の時より$p=\frac{1}{8}\pi$の時の方がLは大きく、$p=0$の時より$p=\frac{3}{8}\pi$の時の方がLは小さい。

したがって、

$$\begin{cases}p=\frac{1}{8}\pi\text{でLは最大}\\ p=\frac{3}{8}\pi\text{でLは最小}\end{cases} \quad \cdots⑥$$

である。

1° $p=\frac{1}{8}\pi$の時

$$\frac{1}{8}L=\int_{\frac{1}{8}\pi}^{\frac{3}{8}\pi}\sqrt{2}\sin(t+\pi/4)\,dt=-\sqrt{2}\left[\cos\frac{5}{8}\pi-\cos\frac{3}{8}\pi\right]=2\sqrt{2}\cos\frac{3}{8}\pi$$

であり、

$$\cos\frac{3}{8}\pi=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{3}{4}\pi}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\quad(>0)$$

から、

$$L=8\sqrt{4-2\sqrt{2}}$$

2° $p=\frac{3}{8}\pi$の時

$$\frac{1}{8}L=2\int_{\frac{3}{8}\pi}^{\pi/2}\sqrt{2}\sin(t+\pi/4)\,dt=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\cos\frac{3}{8}\pi\right)=2-\sqrt{4-2\sqrt{2}}$$

より

$$L=8\{2-\sqrt{4-2\sqrt{2}}\}$$

である。

以上1°、2°及び⑥、Lは連続して値をとることから、

$$8\{2-\sqrt{4-2\sqrt{2}}\}\leq L\leq 8\sqrt{4-2\sqrt{2}}$$

//

である。

# 第 3 問

[解] A… 検査で、第1工程でミス発覚 (確率 $p$)
B… 〃 2 〃 (Aの後の時 $p(1-p)$, Bの後の時 $p$)
C… , クリア (Aの後の時 $(1-p)^2$, Bの後の時 $(1-p)$)

とおく。

(1) 1週間(6日)以内におわるのは、以下の時。

∘ $A \longrightarrow C$
∘ $B \longrightarrow C$
∘ $C$

したがって、$p(1) = p(1-p)^2 + p(1-p)^2 + (1-p)^2 = (2p+1)(1-p)^2$ //

(2) $n$週間は、$6n$日である。工程中、Aが$a$回、Bが$b$回起こるとする。$n$週間以内におわるのは以下の時。

∘ $b=0$… A, A, …, A, C (3(a+1)日, 確率 $p^a(1-a)^2$)
∘ $a, b \neq 0$… A, A…A, B…B, C (3(a+1)+2b日, 〃 $p^a \cdot p(1-p)\cdot p^{b-1}(1-p)$)
∘ $a=0$… B, B, …, B, C (3+2b日, $p(1-p)\cdot p^{b-1}(1-p)$)
∘ $a=b=0$… C (3日, $(1-p)^2$)

いずれの場合も、工程に要する日数は、$3a+2b+3$日、確率 $p^{a+b}(1-p)^2$ であるから、求めるのは、

$p(n) =$ ( $3a+2b+3 \leq 6n$ …① をみたす全ての$(a, b)$についての確率の和) …②

である。まず$a$を固定する。この時$a$の偶奇で場合分けする。

1° $a \in \text{odd}$

①をみたすのは、$b = 0, 1, \ldots, 3n - \frac{3}{2}(a+1)$ だから $\alpha = 3n - \frac{3}{2}(a+1)$ として

$$\sum_{b=0}^{\alpha} p^{a+b}(1-p)^2 = p^a(1-p)^2 \sum_{b=0}^{\alpha} p^b$$
$$= p^a(1-p)^2 \frac{1-p^{\alpha+1}}{1-p} = p^a(1-p^{\alpha+1})(1-p) \quad \cdots ③$$

2° $a \in \text{even}$

①をみたすのは、$b = 0, 1, \ldots, 3n - \frac{3}{2}a - 2$ だから、$\beta = 3n - \frac{3}{2}a - 2$ として

$$\sum_{b=0}^{\beta} p^{a+b}(1-p)^2 = p^a(1-p^{\beta+1})(1-p) \quad \cdots ④$$

次に$a$をうごかす。$b$の存在条件から、$a = 0, 1, \ldots, 2n-1$ だから ③④を②に代入して

$$p(n) = \sum_{a \in \text{odd}} p^a(1-p^{\alpha+1})(1-p) + \sum_{a \in \text{even}} p^a(1-p^{\beta+1})(1-p) \quad \cdots ⑤$$

順に計算する。

$$\circ \sum_{a \in \text{odd}} p^a(1-p^{\alpha+1}) = \sum_{k=1}^{n} p^{2k-1}(1-p^{3n-3k+1}) = \sum_{k=1}^{n}(p^{2k-1} - p^{3n-k})$$
$$= p\frac{1-p^{2n}}{1-p^2} - p^{3n-1}\frac{1-(1/p)^n}{1-1/p} = p\frac{1-p^{2n}}{1-p^2} - p^{2n}\frac{p^n-1}{p-1} \quad \cdots ⑥$$

$$\circ \sum_{a \in \text{even}} p^a(1-p^{\beta}) = \sum_{k=0}^{n-1} p^{2k}(1-p^{3n-3k-1}) = \sum_{k=0}^{n-1}(p^{2k} - p^{3n-k-1})$$
$$= \frac{1-p^{2n}}{1-p^2} - p^{3n-1}\frac{1-(1/p)^n}{1-1/p} = \frac{1-p^{2n}}{1-p^2} - p^{2n}\frac{p^n-1}{p-1} \quad \cdots ⑦$$

⑥⑦を⑤に代入して

$$p(n) = (1-p)\left[p\frac{1-p^{2n}}{(1+p)(1-p)} - p^{2n}\frac{p^n-1}{p-1} + \frac{1-p^{2n}}{(1+p)(1-p)} - p^{2n}\frac{p^n-1}{p-1}\right]$$
$$= 1-p^{2n} - 2p^{2n}(1-p^n) = 2p^{3n} - 3p^{2n} + 1$$ //

(3) (2)から、$q(n) = 1 - p(n)$ とすると、

$$q(n) = 3p^{2n} - 2p^{3n}$$
$$= p^{2n}(3 - 2p^n)$$

で、$p = \frac{1}{2}$として

$$q(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n\left(3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) \geq 2\left(\frac{1}{4}\right)^n \equiv r(n) \quad (\because n \geq 1)$$

である。$r(n)$は$n$について単調減少で、$r(5) = \frac{1}{512} > \frac{1}{1000}$ だから、$n \geq 6$が必要。

$n=6$の時、

$$q(6) = \frac{1}{1024}\left(\frac{3}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^7\right) < \frac{1}{1000}$$

から、十分。以上から、もとめる $\min n = 6$ // である。

[解2]

(2) $n+1$週目までに工事が終了しているのは、第1週目で終わっている時と、1週目で終わらない場合である。前者の確率は$p(1)$である。以下後者について調べる。まず第1週目でおわらないことから、以下のいずれか。(1週目の工程)

∘ $A \longrightarrow A$ (確率 $p^2$, 6日かかる) …①
∘ $A \longrightarrow B$ (〃 $p^2(1-p)$, 6〃) …②
∘ $B \longrightarrow B$ (〃 $p^2(1-p)$, 5〃) …③

①の時は、第2週目から再び同じことのくり返しで、$n+1$週までに終了する確率は$p(n)$.

②の時は、排反を考えて、1週間でBは3回行われることから、$1-p^{3n}$

③の時も、②の時と同様に、$n+1$週以内で終わる確率は、$1-p^{3n}$

以上から、

$$p(n+1) = p^2 \cdot p(n) + p^2(1-p)\cdot(1-p^{3n}) + p^2(1-p)(1-p^{3n})$$
$$= p^2 \cdot p(n) + 2p^2(1-p)(1-p^{3n})$$
$$\therefore p(n+1) - 2p^{3(n+1)} - 1 = p^2(p(n) - 2p^{3n} - 1)$$

くり返し用いて、(1)とあわせて、$p(n) = -3p^{2n} + 2p^{3n} + 1$ //

[解3]

(2) $n$週までに第1工程がおわらないカクリツ $A_n = p^{2n}$
〃 おわっているが、作業は終わらない確率$B_n$とする。

排反及び漸化式から

$$\begin{cases} p(n) + A(n) + B(n) = 1 \\ p(n+1) = p(n) + p(1)\cdot A_n + (1-p^3)B_n \end{cases}$$

これをとくと、[解2]に合流する。(以下略)