第 2 問

▷傾きmをおいても(2)は出来るよう.

T後 93 ②

第 2 問

[解](1) $x_g = \dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}$, $y_g = \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}$ とおく。$l: a(x-x_g)+b(y-y_g)+c=0$ の左辺を $g(x,y)$ とおく。$K=A,B,C$ に対し, $k=1,2,3$ とおくと, $(a,b)\neq(0,0)$ だから、

$$d(l,K) = \frac{\{g(x_k,y_k)\}^2}{a^2+b^2}$$

だから. $T_k = a(x_k-x_g)+b(y_k-x_g)$ とおくと,

$$f(l) = \frac{1}{a^2+b^2}\sum_{k=1}^{3}\{g(x_k,y_k)\}^2$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2}\sum_{k=1}^{3}\left[c^2+2T_k c+T_k^2\right]$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2}\left\{3c^2+2\sum_{k=1}^{3}T_k c+\sum_{k=1}^{3}T_k^2\right\} \quad \cdots ①$$

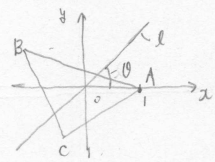
l がある直線に平行な時. a, b は一定であり. ① を c の関数とみると, $c=-\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3}T_k$ で $f(l)$ は最小。この時

$$c = -\frac{1}{3}\left[a(x_1+x_2+x_3-x_1-x_2-x_3)+b(y_1+y_2+y_3-y_1-y_2-y_3)\right]=0$$

である。したがって. $l_0: a(x-x_g)+b(y-y_g)=0$ となるから、たしかに l_0 は $\triangle ABC$ の重心 (x_g, y_g) を通る ■

(2) $\triangle ABC$ の重心が $(0,0)$ となるようにする。$A(1,0)$ の時をかんがえれば良い。この時.

$$\begin{cases} 1+x_2+x_3=0 \\ y_2+y_3=0 \end{cases} \quad \cdots ②$$



である。以下. $S=\sin\theta$, $C=\cos\theta$ とする。$l: -Sx+Cy=0$ とおく。$0\leq\theta<\pi \cdots ③$ の範囲では. θ と l が1対1に対応する。$\cdots ④$

$$d(l,K) = (-Sx_k+Cy_k)^2$$

$$= S^2x_k^2+C^2y_k^2-2CSx_ky_k$$

だから. ② から

$$f(l) = \sum_{k=1}^{3}d(l,K)$$

$$= S^2(1+x_2^2+x_3^2)+C^2(y_2^2+y_3^2)-2CS(x_2y_2+x_3y_3)$$

$$= S^2(2x_2^2+2x_2+2)+2y_2^2C^2-2CS(2x_2y_2+y_2)$$

$$= P(1-\cos 2\theta)+Q(1+\cos 2\theta)-R\sin 2\theta \quad \cdots ⑤$$

ただし. $P=x_2^2+x_2+1$, $Q=y_2^2$, $R=2x_2y_2+y_2$ とした。さらに ⑤ を変形して,

$$f(l) = (-P+Q)\cos 2\theta - R\sin 2\theta+(P+Q) \quad \cdots ⑥$$

である。⑥ が3つの θ で min をとる時、$\triangle ABC$ が正三角形であることを示せば良い。$\cdots ⑦$

$(-P+Q)^2+R^2\neq 0$ の時. 三角関数の合成から適当な実数 α を用いて.

$$f(l) = \sqrt{(-P+Q)^2+R^2}\sin(2\theta+\alpha)+(P+Q)$$

とおける。③ から. $\alpha\leq 2\theta+\alpha<2\pi+\alpha$ だから. $f(l)$ は3つの θ で最小値をとりえず不適。

したがって $(-P+Q)^2+R^2=0$ が必要。$P, Q, R\in\mathbb{R}$ から.

$$-P+Q=0,\ R=0 \quad \cdots ⑧$$

である。逆にこの時、$f(l)=P+Q$ で一定で十分である。P, Q, R に値を代入して、

$$\begin{cases} y_2^2 = x_2^2+x_2+1 \\ y_2(2x_2+1)=0 \end{cases} \quad \cdots ⑨$$

⑨ から $y_2=0$ or $x_2=-\frac{1}{2}$ である。$y_2=0$ の時. ② から $y_3=0$ となり. $\triangle ABC$ が三角形とならず不適だから、$x_2=-\frac{1}{2}$ である。⑨ から. $y_2=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ である。

この時. B, C は $\left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ であり. $\triangle ABC$ は正三角形である。■

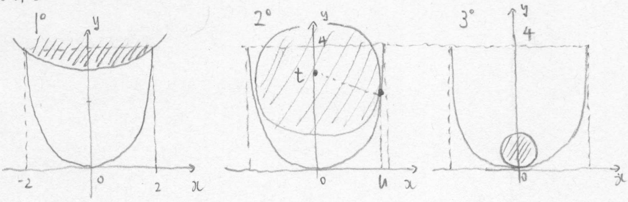
$+y_2(1+x_2)+x_1y_2$

$y_2(2x_2+1)$

T後 93③

第 3 問

[解] xy平面で切断してかんがえる。対称性から、球の中心はy軸上にある。



そこで、円の中心$P(0,t)$として、この円$C: x^2+(y-t)^2=r^2$とかける。まず2°, 3°について、

$0 \leq x$での接点Qのx座標uとして、uでの接線が一致するので、$(x^2)'=2x$から

$$\begin{pmatrix}1\\2u\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{QP}=0 \iff \begin{pmatrix}1\\2u\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0-u\\t-u^2\end{pmatrix}=0 \iff u(2u^2+1-2t)=0 \quad \cdots①$$

又、CがQを通る条件から、

$$u^2+(u^2-t)^2=r^2 \qquad \therefore u^4+(1-2t)u^2+t^2-r^2=0 \quad \cdots②$$

である。②が実解として重解のみを持てば良い。

① $0<t\leq\frac{1}{2}$の時

①をみたすuが$u=0$のみで、これは②に代入して$t, r>0$から$r=t$である。

よってこの時3°のようになる。

② $\frac{1}{2}<t$の時

①から$u=0$又は$u^2=t-\frac{1}{2}$である。前者の時②から$r=t$が必要だが、

$$u^2(u^2+(1-2t))=0$$

となり、$u=\pm\sqrt{t-\frac{1}{2}}$を解に持ち不適。よって、$u^2=t-\frac{1}{2}$であり、②から、

$$r^2=t-\frac{1}{4} \qquad \therefore t=r^2+\frac{1}{4}$$

であり、逆にこの時

$$② \iff \left(u^2-\left(t-\tfrac{1}{2}\right)\right)^2=0$$

となってuについて重解のみを持ち十分。したがって、uと2の大小で以下のようになる。

$$\begin{cases} 0\leq u\leq 2 & \therefore \frac{1}{2}<t\leq\frac{9}{2}\text{の時}, \ 2°\text{になる}. \ \left(\frac{1}{2}<r\leq\frac{\sqrt{17}}{2}\right) \\ 2<u & \therefore \frac{9}{2}\leq t\text{の時}, \ 3°\text{になる} \ \left(\frac{\sqrt{17}}{2}\leq r\right) \end{cases}$$

3°の時、円が$(2,4)$を通ることから

$$4+(4-t)^2=r^2 \qquad \therefore t=4+\sqrt{r^2-4} \quad \left(\because \frac{\sqrt{17}}{2}\leq r, t\geq 4\right)$$

となる。

以上から、$S=4-t$は以下のようになる。

$$\begin{cases} 0<r\leq\frac{1}{2}\text{の時} & S=4-r \\ \frac{1}{2}\leq r\leq\frac{\sqrt{17}}{2}\text{の時} & S=\frac{15}{4}-r^2 \\ \frac{\sqrt{17}}{2}\leq r\text{の時} & S=-\sqrt{r^2-4} \end{cases}$$

//(1)

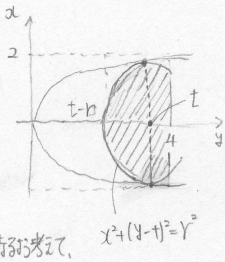
(2) あふれ出る水の体積$V(r)$は、xy平面で$0\leq y\leq 4$とCの共通部分Tとして、Tをy軸まわりに回転した立体の体積に等しい。Cの上端のy座標は、

$$y=t+r=(4-S)+r=4+r-S$$

で、これが4より大きいかで場合分けする。

$$\begin{cases} 0\leq r\leq\frac{1}{2}\text{の時} & y<4 \\ \frac{1}{2}\leq r\leq\frac{3}{2}\text{の時} & y\leq 4 \\ \frac{3}{2}\leq r\text{の時} & y\geq 4 \end{cases}$$

だから



㋐ $0<r\leq\frac{3}{2}$の時

$V(r)$は球の体積に等しく

$$V(r)=\frac{4}{3}\pi r^3 \ (\text{単調増加}) \quad \cdots③$$

㋑ $\frac{3}{2}\leq r$の時

Tの概形は右上図斜線部で、$(0,t)$が中心になるよう考えて、

$$V(r)=\pi\int_{-r}^{S}(r^2-y^2)\,dy$$

$$=\pi\left[\frac{2}{3}r^3+r^2S-\frac{1}{3}S^3\right] \quad \cdots④$$

である。ここで、(1)から

$$r\leq\frac{\sqrt{17}}{2}\text{の時}, \ S'=-2r, \quad \frac{\sqrt{17}}{2}\leq r\text{の時}, \ S'=\frac{r}{S} \quad \cdots⑤$$

に注意すると、

$\boxed{イ-1}$ $\frac{3}{2}\leq r\leq\frac{\sqrt{17}}{2}$の時

$$\frac{V'(r)}{\pi}=2r^2+2rS+S'r^2-S^2\cdot S'=2r(r+S)(S+1-r) \quad (\because ⑤)$$

$$=2r\left(-r^2+r+\frac{15}{4}\right)\left(-r^2-r+\frac{19}{4}\right)$$

$$=+2r\left(r+\frac{3}{2}\right)\left(r-\frac{5}{2}\right)\left(r-\frac{-1+2\sqrt{5}}{2}\right)\left(r-\frac{-1-2\sqrt{5}}{2}\right)$$

から下表を得る。

r	$3/2$		$\frac{-1+2\sqrt{5}}{2}$		$\sqrt{17}/2$
V'		$+$	0	$-$	
V		$\nearrow$		$\searrow$	

したがって、$r=\frac{-1+2\sqrt{5}}{2}$で$V(r)$は最大。 $\cdots⑥$

$\boxed{イ-2}$ $\sqrt{17}/2\leq r$の時

$$\frac{V'(r)}{\pi}=2r^2+2rS+\frac{r^3}{S}-rS=2r^2+rS+\frac{r^3}{S}$$

$$=-8r\frac{1}{\sqrt{r^2-4}\left\{r\sqrt{r^2-4}+r^2-2\right\}}<0$$

から、区間内で単調減少。 $\cdots⑦$

③⑥⑦及び$V(r)$は連続であることから、もとめるrは

$$r=\frac{-1+2\sqrt{5}}{2}$$

//