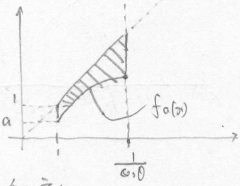
[解] $f_a(x)=\sqrt{x^2-1}+\frac{a}{x}$ とおく。$f_a'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{a}{x^2}=\frac{x^3-a\sqrt{x^2-1}}{x^2\sqrt{x^2-1}}$ …① である。

(1) $f_a(1)=a$ である。a の最大値をかんがえるので、

まず $a>0$ とする。



$$f_a(x)<x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-1}<x-\frac{a}{x}$$

$f_a(1)<1$ から $a<1$ であることと、$x>1$ から、両辺 0 以上で、2 乗して良く、

$$x^2-1<x^2-2a+\frac{a^2}{x^2} \Leftrightarrow 2a-1<\frac{a^2}{x^2} \quad \cdots②$$

これが $1\leq x$ なる任意の x で成り立つから、$a\leq\frac{1}{2}$ である。よって、もとめる最大の a は

$a_0=\frac{1}{2}$ // である。($a<1$ をみたす)

(2) グラフの概形は右上図だから、

$$V=\pi\int_1^{\frac{1}{\cos\theta}}\{x^2-f_a(x)^2\}dx$$

$$=\pi\int_1^{\frac{1}{\cos\theta}}\left\{x^2-\left\{(x^2-1)+\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{x}\sqrt{x^2-1}\right\}\right\}dx$$

$$=\pi\int_1^{\frac{1}{\cos\theta}}\left\{1-\frac{1}{4x^2}-\frac{1}{x}\sqrt{x^2-1}\right\}dx \quad \cdots③$$

である。各項計算して、以下 $c=\cos\theta$ として

- $\int_1^{\frac{1}{c}}\left(1-\frac{1}{4x^2}\right)dx=\left[x+\frac{1}{4}\frac{1}{x}\right]_1^{\frac{1}{c}}=\frac{1}{c}+\frac{c}{4}-\frac{5}{4}$ …④
- $\int_1^{\frac{1}{c}}\frac{1}{x}\sqrt{x^2-1}\,dx=\int_0^{\theta}\cos\alpha\cdot\tan\alpha\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}d\alpha \quad \left(x=\frac{1}{\cos\alpha}\right)$

$$=\int_0^{\theta}\tan^2\alpha\,d\alpha=\int_0^{\theta}\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}-1\right)d\alpha$$

$$=\left[\tan\alpha-\alpha\right]_0^{\theta}=\tan\theta-\theta \quad \cdots⑤$$

だから、④、⑤を③に代入して

$$V=\pi\left(\frac{1}{\cos\theta}+\frac{1}{4}\cos\theta-\tan\theta+\theta-\frac{5}{4}\right) //$$

(3) $t=\frac{\pi}{2}-\theta$ とおくと、$\theta\to\pi/2-0$ の時、$t\to+0$ である。(2) から

$$V=\pi\left(\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}-t)}+\frac{1}{4}\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)-\tan\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\frac{\pi}{2}-t-\frac{5}{4}\right)$$

$$=\pi\left(\frac{1}{\sin t}+\frac{1}{4}\sin t-\frac{1}{\tan t}+\frac{\pi}{2}-t-\frac{5}{4}\right)$$

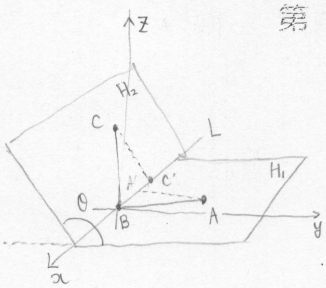
$$=\pi\left(\frac{1-\cos t}{\sin t}+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}\sin t-t\right)\right)$$

$$=\pi\left(\frac{t}{\sin t}\frac{1-\cos t}{t^2}t+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}\sin t-t\right)\right)$$

$$\xrightarrow{t\to+0}\pi\left(1\cdot\frac{1}{2}\cdot0+0+\frac{\pi}{2}-\frac{5}{4}\right)=\frac{\pi}{4}(2\pi-5) //$$

第 2 問

[解] (1) Lをx軸, H_1をxy平面, Bを原点とし, H_2が$z \geq 0$になるように空間座標をおく。CからLに下ろした垂足をC'とする。$C'(p, 0, 0)$, $\overline{CC'} = q\ (>0)$とおくと, H_1とH_2のなす角θの時.



$$C(p,\ q\cos\theta,\ q\sin\theta)$$

とおける。さらに$A(a, b, 0)$ $(b>0)$とおける。θの変化によって$\overline{AB}$, $\overline{BC}$は変化せず.

$$\overline{AC}^2 = (a-p)^2 + (b-q\cos\theta)^2 + q^2\sin^2\theta$$

$$= -2bq\cos\theta + q^2 + b^2 + (a-p)^2 \quad \cdots ①$$

だから. $\angle ABC = \alpha$として$\triangle ABC$に余弦定理を用いて.

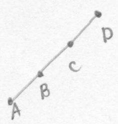
$$\cos\alpha = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{2\overline{AB}\cdot\overline{BC}} = (\text{定数}) + \frac{bq}{\overline{AB}\cdot\overline{BC}}\cos\theta \quad (\because ①)$$

とかける。ここで.〜部について. $0 \leq \theta \leq \pi$で$\cos\theta$は単調減少で. $\dfrac{bq}{\overline{AB}\cdot\overline{BC}} > 0$から.

$\cos\alpha$はθの単調減少関数。$0 \leq \alpha \leq \pi$とあわせて. αはθの単調増加関数。

よって題意は示された。図

(2) 1° A, B, C, Dが同一直線上の時

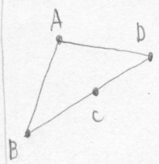


対称性から左の時だけかんがえる。

$$\angle ABC + \angle BCD + \angle CDA + \angle DAB = 2\pi$$

だから与式は成立。

2° $A \sim D$のうち, 3つが同一直線上の時



対称性から, 左の場合だけかんがえる。

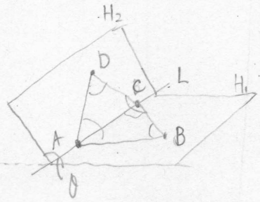
$$\angle ABC + \angle BCD + \angle CDA + \angle DAB = \pi + \pi = 2\pi$$

だから与式は成立。

3° どの3点も同一直線上にない時、

直線ACをLとして、Lを共通の境界とし, 角θ $(0 \leq \theta \leq \pi)$で交わる2半平面H_1, H_2上のLと異なる所に. 各々B, Dをとることが出来る。

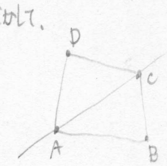
この時. 3点(B, C, D), (A, B, D)に(1)の議論を用いることが出来る。$\cdots$②



まず. 平面上でA, B, C, Dを固定し, θを動かす$(0 \leq \theta \leq \pi)$。この時$\angle ABC$, $\angle CDA$は一定で, ②から. $\angle DAB$, $\angle BCD$はθの単調増加関数だから、

$\angle ABC + \angle BCD + \angle CDA + \angle DAB$は$\theta = \pi$で最大値をとる。この時.

4点A, B, C, Dは、どの3点も同一直線上にないことから四角形$ABCD$を構成し, この時直線ACに関してB, Dが反対側にあることから、右図のようになる。よって. 条件をみたすもとで$A \sim D$をうごかして,



$$\angle ABC + \angle BCD + \angle CDA + \angle DAB = 2\pi$$

$(\because$内角の和$)$

よって

$$\angle ABC + \angle BCD + \angle CDA + \angle DAB \leq 2\pi$$

から与式は成り立つ。

以上1°〜3°から, 題意は示された図

T. こうと 92 [3]

第 3 問

[解] $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}x^k$ に対し、$Q_n(x)=(x-1)P_n(x)$ とおく。

(1) 帰納法で題意（◇とおく）を示す。$n=1$ の時 $P_1(x)=1$ であり、$m=1$ ならば あまりは $P_0(x)=0$ であり、$m\geq 2$ の時、あまりは $P_1(x)$ となるから◇は成立。以下、$n\leq k\ (k\in N)$ での◇の成立を仮定する。この時適当な多項式 $R(x)$ があって、

$$P_k(x)=R(x)\cdot P_m(x)+P_i(x) \quad (i=0,1,\cdots,m-1) \quad \cdots①$$

と書ける。$P_{k+1}(x)=xP_k(x)+1$ だから、①を代入して

$$P_{k+1}(x)=xR(x)\cdot P_m(x)+xP_i(x)+1$$
$$=x\cdot R(x)\cdot P_m(x)+P_{i+1}(x) \quad \cdots②$$

したがって、$P_{k+1}(x)$ を $P_m(x)$ でわったあまりは、$P_{i+1}(x)$ を $P_m(x)$ でわったあまりに等しい。…③

1° $i=0,1,\cdots,m-2$ の時

②③から、$P_{k+1}(x)$ を $P_m(x)$ でわったあまりは $P_1(x),\cdots,P_{m-1}(x)$ となり、◇は成り立つ

2° $i=m-1$ の時

$P_{i+1}(x)=P_m(x)$ で、これを $P_m(x)$ でわったあまりは $P_0(x)=0$。③から、◇は成り立つ。

以上から、いずれの場合も◇が成り立つ。よって $n=k+1$ でも◇は成立。

したがって◇が成立する 図

(2) $P_l(x)P_m(x^2)P_n(x^4)=P_{100}(x)$ …④

$P_k(x)$ は多項式だから、$x\neq 1$ で④が成り立てば $x=1$ でも④が成立。よって $x\neq 1$ とすると、

$$④\Leftrightarrow (x-1)P_l(x)\cdot(x^2-1)P_m(x^2)\ (x^4-1)\cdot P_n(x^4)=P_{100}(x)\cdot(x-1)(x^2-1)(x^4-1)$$
$$\Leftrightarrow Q_l(x)\cdot Q_m(x^2)Q_n(x^4)=Q_{100}(x)\cdot(x^2-1)(x^4-1)$$
$$\Leftrightarrow (x^l-1)(x^{2m}-1)(x^{4n}-1)=(x^{100}-1)(x^2-1)(x^4-1) \quad \cdots⑤$$

⑤が x についての恒等式だから、次数を比較して、（$l,n,m\in N$ から）

$$l+2m+4n=106 \quad \cdots⑥$$
$$(2m+4n,\ l+4n,\ l+2m)=(104,102,6) \quad \cdots⑦$$
$$(l,2m,4n)=(100,4,2) \quad \cdots⑧$$

である。⑧から、$n=1$ 又は $n=25$ である。

1° $n=1$

⑧から、$(l,m)=(100,1),(2,50)$ が必要で、共に⑥、⑦をみたし方。

2° $n=25$

⑧から $(l,m)=(2,2),(4,1)$ が必要で、共に⑥、⑦をみたし方。

以上から、

$$(l,m,n)=(100,1,1)\ (2,50,1),\ (2,2,25),\ (4,1,25)$$ //