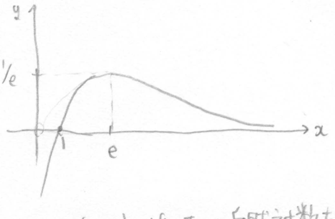
第1問

[解] (1) $f(x)=\frac{\log x}{x}$ とおく. $f'(x)=\frac{1-\log x}{x^2}$ より. 下表をうる

x	0		e	
f'		$+$	0	$-$
f		↗		↘

又. $x\to 0$ で $f(x)\to 0$, $x\to\infty$ で $f(x)\to +0$

よってグラフは以下



(2) $a,b>0$ の時. $a^b=b^a$ の両辺 自然対数をとって.

$$\frac{\log a}{a}=\frac{\log b}{b} \quad \cdots ①$$

(1)のグラフと $2<e<3$ から. (*). 対称性より $a<b$ とすると. $a=2$. ①に代入して

$$\frac{\log 2}{2}=\frac{\log b}{b}$$

$b=4$ はこの解であり. グラフより これをみたす解は1つ存在するから $b=4$ のみが解. $a>b$ の時も考えて

$(a,b)=(2,4)\ (4,2)$ #

(3) $x\neq 3$ とする. $3^x=x^3$ をみたす $x=\frac{b}{a}$ ($a,b\in\mathbb{N}, x>0$, a,bは互いに素) があると仮定する. 両辺自然対数をとる(∵$x>0$)

$$\frac{\log 3}{3}=\frac{\log x}{x}$$

(1)のグラフから. $1<x<3$ …② である.

$$3^{\frac{b}{a}}=\left(\frac{b}{a}\right)^3$$

$$3^b=\left(\frac{b}{a}\right)^{3a} \quad \cdots ③$$

aとbは互いに素だから. $a\neq 1$と仮定すると. ③は

(整数)=(非整数)

となり矛盾. 従って $a=1$ であり. $x=b\in\mathbb{N}$ となる

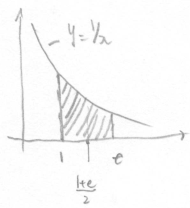
②とあわせて $x=2$ が必要だが. これは(2)に矛盾.

したがって. $3^x=x^3$ をみたす正の有理数は $x=3$ のみである 図

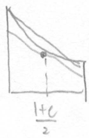
[

[*] 証明は比較的楽(略)

① $1=\int_1^e \frac{1}{x}dx$ を用いる



面積近似する、



$$\frac{2}{1+e}(e-1)<1<\frac{1}{2}(e-1)\left(1+\frac{1}{e}\right)$$

をとくと.

$1+\sqrt{2}<e<3$ 図

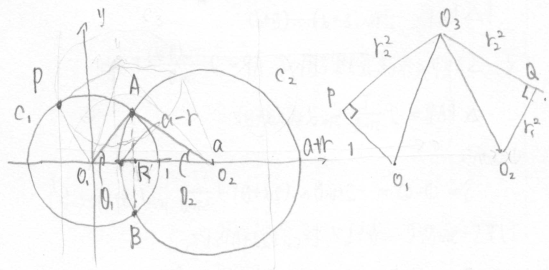
②

東大こうき　1991 四

第2問

[解](1) xy平面で考える. $C_1: x^2+y^2=1$. $C_2: (x-a)^2+y^2=r_1^2$

$(a, r>0)$として一般性を失わない. $C_3: (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r_2^2$とおく.



C_1, C_2が2交点を持つので $-1<a-r<1$ …① である.

C_1とC_3, C_2とC_3の交点の1つP, Qとし, $\angle AO_1O_2=\theta_1$, $\angle AO_2O_1=\theta_2$とする.

ABとx軸の交点Rとおくと. $AR=\sin\theta_1=r_1\sin\theta_2$ …②

である。又. C_kの中心O_k $(k=1,2,3)$とおく. 題意から三平方の定理より.

$$r_2^2+1=\overline{O_1O_3}^2,\quad r_2^2+r_1^2=\overline{O_2O_3}^2 \quad \cdots ③$$

O_3からx軸に下ろした垂足Hとして同様に

$$\overline{O_3H}^2=\overline{O_1O_3}^2-\overline{O_1H}^2=\overline{O_3O_2}^2-\overline{O_2H}^2$$

③を代入して

$$\beta^2=r_2^2+1-\overline{O_1H}^2=r_2^2+r_1^2-\overline{O_2H}^2 \quad \cdots ④$$

又. $\overline{O_1R}=\cos\theta_1$, $\overline{O_2R}=r_1\cos\theta_2$ であるから.

$$r_2^2+1-\overline{O_1R}^2=r_2^2+1-\cos^2\theta_1=r_2^2+\sin^2\theta_1 \quad \cdots ⑤$$

である.

$$r_2^2+r_1^2-\overline{O_2R}^2=r_2^2+r_1^2-r_1^2\cos^2\theta_2=r_2^2+r_1^2\sin^2\theta_2 \quad \cdots ⑥$$

②.⑤.⑥から

$$r_2^2+1-\overline{O_1R}^2=r_2^2+r_1^2-\overline{O_2R}^2 \quad \cdots ⑦$$

ここで. x軸上の点$X(x,0)$に対し. $L_1=r_2^2+1-\overline{O_1X}^2$, $L_2=r_2^2+r_1^2-\overline{O_2X}^2$とおくと. $L_1=-x^2+1+r_2^2$, $L_2=-(x-a)^2+r_1^2+r_2^2$より.

$L_1=L_2$は高々1つの解しか持たない。このことと④.⑦から. H=Rとなり. したがって C_3の中心O_3は直線AB上にある図

(2) C_1, C_2のx軸に関する対称性から. C_3の中心が$y\geq 0$にあるとして良い。(1)から

$$\alpha=\cos\theta_1$$

$$\beta=\sqrt{r_2^2+\sin^2\theta_1}\quad (\because \beta\geq 0)$$

である. $f(x,y)=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2$とおくと. $A(\cos\theta_1, \sin\theta_1)$, $B(\cos\theta_1, -\sin\theta_1)$より. (以下 $C=\cos\theta_1$, $S=\sin\theta_1$として. $C>0$, $S>0$)

$$f(C,S)=(S-\beta)^2=r_2^2+2S^2-2S\sqrt{r_2^2+S^2}<r_2^2\quad(\because S>0, r_2>0)$$

$$f(C,-S)=(S+\beta)^2=r_2^2+2S^2+2S\sqrt{r_2^2+S^2}>r_2^2$$

だから. たしかに Aは円C_3の内側にあり. Bは円C_3の外側にある.

よって示された。図

第 3 問

▷ ∠Rが出て来て長さで押せそうなので. 2変数さ束縛条件

⟹ 対称式形だから. 必ず2次で処理

* 2~~級~~ 変数の高速処理

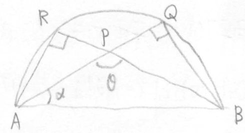
① 図示できないか …少しメンドウそうなら次へ

② 文字を消せないか（~~…~~ほしい文字の値域だけ得る）

[別解] 角度でヤル

$\pi-\theta-\alpha>0$

$\alpha<\pi-\theta$



$\angle QAB=\alpha$とおく。

$\begin{cases} \triangle AQB=2\sin\alpha\cos\alpha \\ \triangle RAB=-2\sin(\theta+\alpha)\cos(\theta+\alpha) \end{cases}$ …①

又. $\triangle ABP$に余弦定理を用いて. $AP=2\dfrac{\sin(\theta+\alpha)}{\sin\theta}$ だから

$\triangle PAB=2\dfrac{1}{\sin\theta}\sin\alpha\sin(\alpha+\theta)$ …②

①.②から

$S=①-②=-2\sin\theta\cos(2\alpha+\theta)+\dfrac{1}{\sin\theta}\{\cos(2\alpha+\theta)-\cos\theta\}$

以下$s=\sin\theta$, $c=\cos\theta$として, $t=\cos(2\alpha+\theta)$として,

$S=-2st+\dfrac{1}{s}(t+c)=\left(\dfrac{1-2s^2}{s}\right)t-\dfrac{c}{s}$ …③

θを固定した時. $0<\alpha<\pi-\theta$ …④ だから.

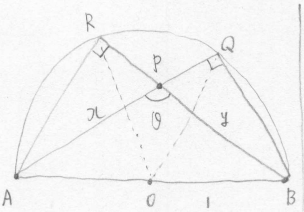
$\theta<2\alpha+\theta<2\pi-\theta$ …⑤

又. $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$である。以上から$1-2s^2$の符号で分けて考えて…、(以下略)

T後 11回

第 3 問

[解] $\overline{AP}=x$, $\overline{BP}=y$とおく。($0<x, y<2$ …①)



△ABPに余弦定理を用いて、

$$4=x^2+y^2-2xy\cos\theta \quad \cdots②$$

であり、

$$\begin{cases} \triangle APR=\frac{1}{2}x^2\sin(\pi-\theta)\cos(\pi-\theta) \\ \qquad =-\frac{1}{2}x^2\sin\theta\cos\theta \\ \triangle APB=\frac{1}{2}xy\sin\theta \quad \cdots③ \\ \triangle PBQ=\frac{-1}{2}y^2\sin\theta\cos\theta \end{cases}$$

だから、以下$s=\sin\theta$, $c=\cos\theta$として、

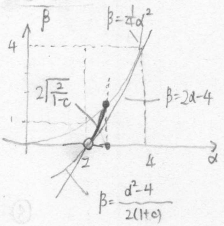
$$S=\triangle APR+\triangle APB+\triangle PBQ$$
$$=\frac{1}{2}(-x^2sc+sxy-scy^2) \quad (\because ③)$$
$$=\frac{1}{2}s(-cx^2+xy-cy^2) \quad \cdots④$$

である。ここで$\alpha=x+y$, $\beta=xy$とすると、まずx, yはtの2次式$t^2-\alpha t+\beta=0$の①をみたす2実解(重解含む)だから、

$$\begin{cases} 端点: \beta>0,\ 4-2\alpha+\beta\geq 0 \\ 判別式: \alpha^2-4\beta\geq 0 \\ 軸: 0<\frac{1}{2}\alpha<2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta>0,\ \beta\geq 2\alpha-4 \\ \beta\leq\frac{1}{4}\alpha^2 \\ 0<\alpha<4 \end{cases} \quad \cdots⑤$$

又、②、④からx, yを消去して、

$$4=\alpha^2-2(1+c)\beta \quad \cdots⑥$$
$$S=\frac{1}{2}s(-c\alpha^2+(2c+1)\beta) \quad \cdots⑦$$



⑤、⑥を図示して右図太線部(境界含む)だから

$$\beta=\frac{\alpha^2-4}{2(1+c)} \quad \left(2<\alpha\leq 2\sqrt{\frac{2}{1-c}}\right) \quad \cdots⑧$$

となる。($\because \frac{\pi}{2}<\theta<\pi$) ⑧を⑦に代入して

$$S=\frac{1}{2}s\left(-c\alpha^2+\frac{2c+1}{2(1+c)}(\alpha^2-4)\right)$$
$$=\frac{1}{4}\frac{s}{1+c}\{(1-2c^2)\alpha^2-4(2c+1)\}\equiv f(\alpha)$$

だから、$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$より、

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3}{4}\pi の時、f(2)<S\leq f\left(2\sqrt{\frac{2}{1-c}}\right) \\ \theta=\frac{3}{4}\pi の時 \quad S=1 \\ \frac{3}{4}\pi<\theta<\pi の時、f\left(2\sqrt{\frac{2}{1-c}}\right)\leq S<f(2) \end{cases} \quad \cdots⑨$$

である。ここで

$$\begin{cases} f(2)=-2sc=-\sin 2\theta \\ f\left(2\sqrt{\frac{2}{1-c}}\right)=\frac{s(1-2c)}{1-c} \end{cases} \quad \cdots⑩$$

だから、⑩を⑨に代入して、

$$\begin{cases} -\sin 2\theta<S\leq\frac{\sin\theta(1-2\cos\theta)}{1-\cos\theta} & \left(\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3}{4}\pi\right) \\ S=1 & \left(\theta=\frac{3}{4}\pi\right) \\ \frac{\sin\theta(1-2\cos\theta)}{1-\cos\theta}\leq S<-\sin 2\theta & \left(\frac{3}{4}\pi<\theta<\pi\right) \end{cases}$$

//

(2) $f(\theta)=-\sin 2\theta$, $g(\theta)=\frac{s(1-2c)}{1-c}$とおく。

$$g'(\theta)=\frac{(1-c)\{c-2c^2+2s^2\}-s^2(1-2c)}{(1-c)^2}$$
$$=\frac{(1-c)(2+c-4c^2)-(1-c^2)(1-2c)}{(1-c)^2}$$
$$=\frac{-2c^2+2c+1}{1-c}$$

から、θ_0を、$\frac{\pi}{2}<\theta_0<\pi$かつ$\cos\theta_0=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$をみたすようにとって、下表をうる。

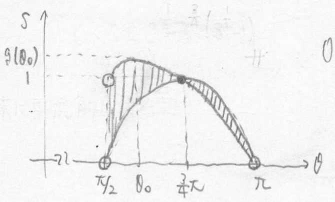
θ	$\pi/2$		θ_0		π
c	0	+	0	−	−1
g'		+		−	
g	(1)	↗		↘	(0)

(θ_0を考えるにあたって、
$\frac{1-\sqrt{3}}{2}>-\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 1>\sqrt{3}-\sqrt{2}$
$\Leftrightarrow \sqrt{6}>2$ ($\because$2乗して良い)
だから$\frac{1-\sqrt{3}}{2}>-\frac{\sqrt{2}}{2}$が成立。)

したがって、$g(\theta)$は$\theta=\theta_0$で最大。この時、$\sin\theta_0=\sqrt{1-\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$だから、

$$g(\theta_0)=\frac{\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}(1-1+\sqrt{3})}{1-\frac{1-\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\sqrt{3}\sqrt{\sqrt{3}/2}}{1+\sqrt{3}}=2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{3}{4}}(3^{\frac{1}{2}}-1)$$

又、$f(\theta)$は$0<f(\theta)<1$であり、$\theta_0<\frac{3}{4}\pi$ ($\because$単位円内でcは単調減少)だから(1)とあわせて$1<g(\theta_0)$。よってSのとりうる領域は下図斜線部で(境界は実線のみ含む)



$$0<S\leq 2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{3}{4}}\left(3^{\frac{1}{2}}-1\right)$$

//