90後[I]

第 1 問

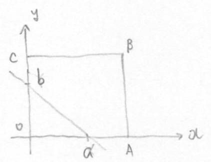
[解] 題意の直線を引くことの出来る領域を求める。対称性からまず

$$\begin{cases} 1^\circ\ OA,\ OC\ を通る.\\ 2^\circ\ OC,\ AB\ を通る. \end{cases}$$

ものをしらべる。題意の直線 l とする。

1° OA, OCを通る時

l の x, y 切片を a, b $(0<a, b\leq 2)$ とする。



この時 右図斜線部の面積が2以下なので、

これが1になれば良く、

$$\frac{1}{2}ab = 1 \quad \therefore\ ab=2 \qquad \cdots ①$$

このもとで $l: \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ の通過領域をもとめる。

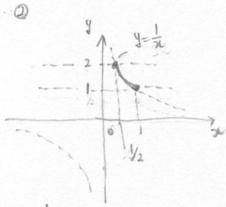
$$y = +b\left(1-\frac{x}{a}\right) = +b\left(1-\frac{1}{2}bx\right) \quad (\because ①) \equiv f(b)$$

である。$0<a, b\leq 2$ にも①を代入して.

$$0<\frac{2}{b}\leq 2 \wedge 0<b\leq 2 \iff 1\leq b\leq 2 \qquad \cdots ②$$

$x=0$ の時 $f(b)=b$ である。以下 $x\neq 0$ とする。

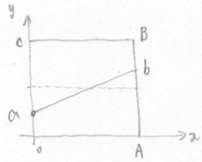
$$f(b) = -\frac{x}{2}\left(b-\frac{1}{x}\right)^2+\frac{1}{2x}$$



だから右図から.

$$\begin{cases} x\leq\frac{1}{2}\ の時\ f(1)\leq y\leq f(2) \quad (x\neq 0)\\ \frac{1}{2}\leq x\leq 1\ の時\ \min(f(1), f(2))\leq y\leq f\left(\frac{1}{2x}\right) \qquad \cdots ★_1\\ 1\leq x\ の時\ f(2)\leq y\leq f(1) \end{cases}$$

2° OC, ABを通る時



l と OC, AB の交点を各々 $(0,a)$ $(2,b)$ とする。この時 l の下側とQの囲む面積は. $(0\leq a, b\leq 2)$

$$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(a+b) = a+b$$

である。対称性から. $a+b\leq 2 \cdots ③$ の時のみ考える。

この時 題意の条件は

$$a+b=1 \qquad \cdots ④$$

である。さらに

$$l: y=\frac{b-a}{2}x+a = g(a)$$

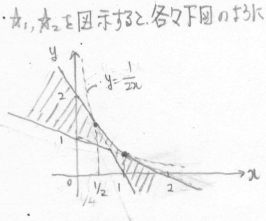
とかける。④から $b=1-a$ だから 代入して

$$\begin{cases} l: y=\frac{1-2a}{2}x+a = (1-x)\cdot a+\frac{1}{2}x\\ 0\leq a\leq 1 \end{cases}$$

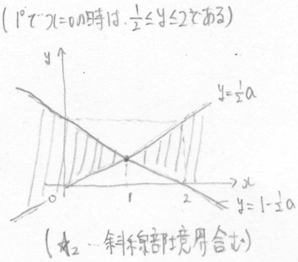
であるから. 通過領域は.

$$\begin{cases} x\leq 1\ の時.\ g(0)\leq y\leq g(1) \qquad \cdots ★_2\\ 1\leq x\ の時.\ g(1)\leq y\leq g(0) \end{cases}$$

・$★_1$, $★_2$ を図示すると. 各々下図のようになる。(1° で $x=0$ の時は. $\frac{1}{2}\leq y\leq 2$ である)

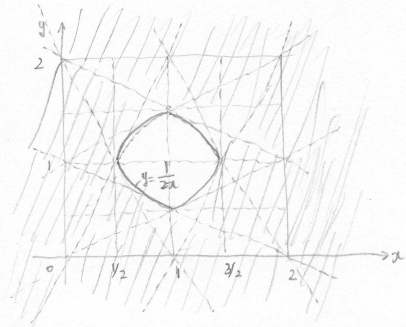


($★_2$…斜線部境界含む)



($★_2$…斜線部境界含む)

したがって対称性から. l の通過領域は下図斜線部



したがって上図非斜線部(境界含まず)がPの存在領域であり //

この面積Sとして、対称性から

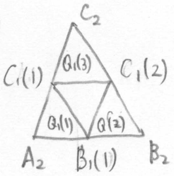
$$\frac{1}{4}S = \int_{1/2}^{1}\left(1-\frac{1}{2x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ S = 2(1-\log 2) \text{ //}$$

第3問

[解] (1)



C_2を通らない時.

$\begin{cases} A_2 \to B_1(1) \to B_2へ & \cdots ① \\ A_2 \to C_1(1) \to B_2へ & \cdots ② \end{cases}$

の2つの場合がある.

①の時. $B_1(1)$から $Q_1(2)$のみを通るのが x_1+y_1通り, $B_1(1)$から$C_1(1)$に行くのが1通り.

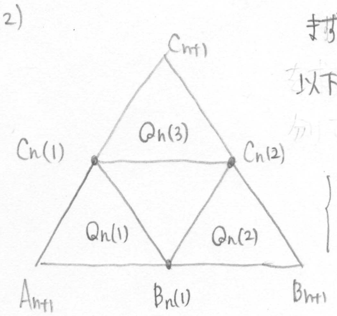
②の時. $C_1(2)$へ行くのが2通り. $B_1(1)$へ行くのがx_1+y_1通り

以上から

$$x_2 = 2(x_1+y_1)+3 = 7 \ //$$

C_2を通る時. A_2から$C_1(1) \to C_2 \to C_1(2)$といって$B_2$に行くので. 数え上げて $y_2 = 3$ //

(2)



まず, x_{n+1}をもとめる. これは, 以下のように場合分けできる.

$\begin{cases} 1^\circ & Q_n(1)を. B_n(1)で出る \\ 2^\circ & Q_n(1)をC_n(1)で出る \end{cases}$

1°の時 $Q_n(1)$を出た後は $Q_n(2)$内を通ってB_{n+1}へ行くので.

$(x_n+y_n)^2$通り

2°の時. $Q_n(1)$を出たあと. $Q_n(3)$内$\to Q_n(2)$内と通ってB_{n+1}へ行く. この時. $Q_n(1)$内を通過中に$B_n(1)$を通るか否かで場合分けして考える

㋐ $Q_n(1)$内を通過中に$B_n(1)$を通る時.

対称性から. $A_{n+1} \to C_n(1)$が y_n通り.

$C_n(1) \to C_n(2)$がx_n通り. $C_n(2) \to B_{n+1}$がx_n通り.

($\because C_n(2)$を通過中, $B_n(1)$を通ることができない)

あわせて $y_n \cdot x_n^2$通り

㋑ $Q_n(1)$を通過中, $B_n(1)$を通らない時

㋐と同様に考えて $x_n \cdot x_n \cdot (x_n+y_n)$通り

以上から

$$x_{n+1} = (x_n+y_n)^2 + 2x_n^2 y_n + x_n^3 \ //$$

次に, y_{n+1}をもとめる. これは $Q_n(1) \to Q_n(3) \to Q_n(2)$と行く経路のみで, x_{n+1}の時と同様に考えて.

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= x_n \cdot y_n(x_n+y_n) + y_n^2 \cdot x_n \\ &= 2x_n y_n^2 + x_n^2 y_n \ // \end{aligned}$$

(3) (1).(2)から

$$x_3 = 10^2 + 2 \cdot 49 \cdot 3 + 49 \cdot 7 = 737 \ //$$

$$y_3 = 2 \cdot 7 \cdot 9 + 49 \cdot 3 = 273 \ //$$

[本時のミス]

x_n, y_nのとりちがえ ⇒ 検算で発覚しないパターン