2006 60/120

第 1 問

[解] $\begin{cases} A(x)=a_1(x+b_1) \\ B(x)=a_2(x+b_2) \quad (a_1a_2a_3\neq 0) \\ C(x)=a_3(x+b_3) \end{cases}$

とおく. 与式から

$$A^2(x)=(C(x)+B(x))(C(x)-B(x))$$

$$a_1^2(x+b_1)^2=(a_2+a_3)(a_3-a_2)\left(x+\frac{a_2b_2+a_3b_3}{a_2+a_3}\right)\left(x+\frac{a_3b_3-a_2b_2}{a_3-a_2}\right) \cdots *$$

係数比較して

$$\begin{cases} b_1=\dfrac{a_2b_2+a_3b_3}{a_2+a_3}=\dfrac{a_3b_3-a_2b_2}{a_3-a_2} \cdots ① \\ a_1^2=a_3^2-a_2^2 \end{cases}$$

①から

$$\begin{cases} a_2(b_1-b_2)=a_3(b_3-b_1) \\ a_3(b_1-b_3)=a_2(b_1-b_2) \end{cases}$$

$\alpha=b_1-b_2$, $\beta=b_1-b_3$ とおくと

$$\begin{cases} a_2\alpha=-a_3\beta \\ a_3\beta=a_2\alpha \end{cases}$$

より, $\alpha=\beta=0$ となり. (∵辺々足し引きする) $b_1=b_2$, $b_1=b_3$ だから

たしかに $A(x)$, $B(x)$ は $C(x)$ の定数倍である. 図

*において. $(a_2+a_3)(a_3-a_2)=0$ のとき $a_1=0$ となり仮定に反する

$A^2=(C-B)$

$=(C+B)(C-B)$

$\frac{b_1}{a_1}$

$a_3b_3-a_2b_2$

$a_1x+a_2b_2$

$a_3x+b_3a_3$

$a_2b_2+a_3b_3=a_2b_1+a_3b_1$

$a_2(b_3-b_1)=a_3(b_1-b_2)$

$a_3(b_1-b_3)=a_2(b_1-b_2)$

第 2 問

[解]

第 3 問

[解] さいの目は1以上だから、以下のいずれか($n \geq 4$のとき)

㋐ 1つ4, 他が1
㋑ 2つが(3, 2), 他が1
㋒ 3つが(2, 2, 2) 他が1

㋐となる確率は $n\left(\frac{1}{6}\right)^n$, ㋑ 〃 $n(n-1)\left(\frac{1}{6}\right)^n$, ㋒ 〃 $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^n$

で、㋐〜㋒は排反だから もとめる確率 $p(n)$として

$$p(n) = \left[n + n(n-1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}\right]\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

$$= (n^2+3n+2)\cdot n\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}$$

$$= n(n+1)(n+2)\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}$$

又 $n \leq 3$のとき

$$p(1) = \frac{1}{6},\quad p(2) = \frac{1}{9}\quad p(3) = \frac{5}{108}$$

で、この時も上の式で良い。

以上から

$$p(n) = n(n+1)(n+2)\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}$$

//

3 3.0
2.1
1.1.1

n=4
4.1.1.1 4
3.2.1.1 4
2.2.2.1

n=2
4から5
1.4
2.3
3.2
4.1

3.1
2.2
1.3
$\frac{3}{36}$

$\frac{1}{12}$

n=3
1.1.4 3
1.2.3 6
2.2.2 1

$\frac{3\cdot4\cdot5}{6\cdot6\cdot6\cdot6}$

$\frac{5}{3\cdot6\cdot6}$

~~"オイラーの不等式より"などとしてはいけない~~。この証明をすれば良いだけなので、有名な方法をちょろっとやっておわり。
いくつか別の方法を示しておく

① $S=\dfrac{abc}{4R}$ を用いる方法

$\boxed{\text{正弦定理から } S=\dfrac{abc}{4R} \text{ である}}$

$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$, $S=\frac{abc}{4R}$ から

$$R-2r=\frac{abc}{4S}-\frac{4S}{a+b+c}$$

$$=\frac{abc(a+b+c)-16S^2}{4S(a+b+c)}$$

この分子が0以上であることを示す。

$$abc(a+b+c)-16S^2$$

$$=abc(a+b+c)-(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$$

$$=(a+b+c)(abc-(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c))$$

$$=(a+b+c)\{(x+y)(y+z)(z+x)-8xyz\}$$

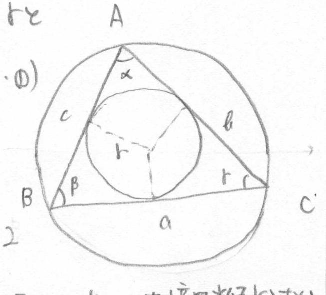
ただし、ラビ変換 $x=\dfrac{a+b-c}{2}$, $y=\dfrac{b+c-a}{2}$, $z=\dfrac{a+c-b}{2}$

を用いた。$(x, y, z\geqq 0)$. ～～ は AM−GM から0以上だから

示された.

第 4 問

[解] $\angle A=\alpha, \angle B=\beta, \angle C=\gamma$ とおく ($\alpha,\beta,\gamma>0,\ \alpha+\beta+\gamma=\pi$ …①)



正弦定理から

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2$$

したがって、$\triangle ABC$の面積を2通りで表して、内接円半径rとおくと

$$\frac{1}{2}r(2\sin\alpha+2\sin\beta+2\sin\gamma)=\frac{1}{2}\sin\alpha\cdot 2\sin\beta\cdot 2\sin\gamma$$

$$r(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)=2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \quad \cdots ②$$

ここで $f(x,y)=\dfrac{\sin x\sin y\sin(x+y)}{\sin x+\sin y+\sin(x+y)}$ とおく ($0<x,y,\ x+y<\pi$)

$$f(x,y)=\frac{2\sin\frac{x+y}{2}}{2\sin\frac{x+y}{2}}\cdot\frac{\sin x\sin y\cos\frac{x+y}{2}}{\cos\frac{x-y}{2}+\cos\frac{x+y}{2}}$$

$$=\frac{\cancel{2}\sin x\ \sin\frac{y}{2}\cancel{\cos\frac{y}{2}}\cos\frac{x+y}{2}}{\cancel{2}\cos\frac{x}{2}\cancel{\cos\frac{y}{2}}}$$

$$=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}\left[\sin\left(y+\frac{x}{2}\right)+\sin\frac{x}{2}\right]$$

$\sin x>0$, $\cos\frac{x}{2}>0$ から ($\because 0<x,y,\ x+y<\pi$) xを固定した時 $f(x,y)$は $\sin\left(y+\frac{x}{2}\right)=1$ $\therefore y=\frac{1}{2}(\pi-x)$ で最大値

$$\max f(x,y)=\sin\frac{x}{2}\left(1-\sin\frac{x}{2}\right) \quad (0<x<\pi)$$

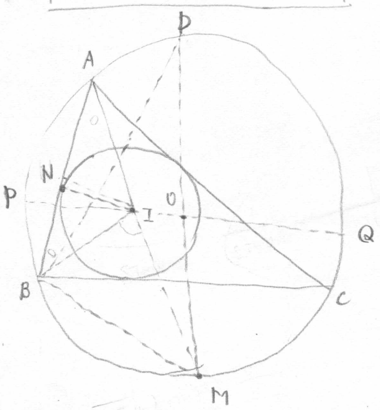
をとる。$t=\sin\frac{x}{2}$ ($0<t<1$) とおくと $\max f(x,y)$は $t=\frac{1}{2}$ で最大値 $\frac{1}{4}$ をとる。以上と①,②から

$$r=2f(\alpha,\beta)\leq\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

よって $r\leq\frac{1}{2}$ 図

[参考] … オイラーの公式の証明

$$\boxed{d^2=R(R-2r)}$$



$(R-d)(R+d)=PI\cdot IQ=\underbrace{AI\cdot IM}_{①}=\underbrace{AI\cdot BM}_{②}=\underbrace{DM\cdot NI}_{③}=2Rr$

より示された。図

①は方べき

②は

$\angle BIM=\angle BAI+\angle ABI$

☆ 重要

$=\angle MAC+\angle IBC$

$=\angle IBM$

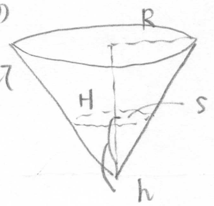
から2等辺三角形

③は $\triangle ANI\sim\triangle DBM$ (2角相等)

⇒これから $R\geq 2r$ は明らか!!

$$\frac{\sin x\left[\frac{1}{2}\sin\frac{x+3y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\right]}{2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}}$$

[解] 容器は底面半径R高さHの円錐である. 水面の底からの高さhの時の水面の面積Sとして



$$\sqrt{h} = -S\frac{dh}{dt}$$

図から$S = \pi R^2\left(\frac{h}{H}\right)^2$を代入

$$\sqrt{h} = \frac{-\pi R^2}{H^2}h^2\frac{dh}{dt}$$

$$dt = \frac{-\pi R^2}{H^2}\cdot h^{\frac{3}{2}}dh$$

両辺積分して. Cを定数として

$$t = \frac{-\pi R^2}{H^2}\ \frac{2}{5}h^{\frac{5}{2}} + C$$

$t=0$の時. $h=H$だから.

$$\frac{2}{5}\pi R^2\sqrt{H} = C$$

なので. $h=0$の時

$$t = \frac{2}{5}\pi R^2\sqrt{H}$$ //

である.

[別:遠回りして検算]

時刻tでの高さhとすると

$$V(t) = \frac{1}{3}\pi HR^2 - \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{H}R\right)^2\cdot h$$

$$= \frac{1}{3}\pi HR^2 - \frac{1}{3}\pi\frac{R^2}{H^2}h^3$$

だから tで微分

$$-\pi\frac{R^2}{H^2}h^2\frac{dh}{dt} = \sqrt{h}$$

$$-\pi\frac{R^2}{H^2}h^{\frac{3}{2}}dh = dt$$

⇒同じ方程式

第 6 問

[解] $\tan 1°$が有理数と仮定する. 以下 $\tan\theta°$ $(\theta=1,2,\cdots,89)$が有理数であることを帰納的に示す. $\theta=1$の時は仮定から成立するので. $\theta=k\in\mathbb{N}$での成立を仮定し, $\theta=k+1$でも成立することを示す.

$$\tan(k+1)=\frac{\tan 1°+\tan k°}{1-\tan 1°\tan k°}\in\mathbb{Q}\quad(\because 仮定)$$

から $\theta=k+1$でも成立. 以上から $\tan\theta°\in\mathbb{Q}$ $(\theta=1,2,\cdots,89)$

だが, $\theta=60°$とすると $\tan 60°=\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$となり. 矛盾。

従って. $\tan 1°\notin\mathbb{Q}$ である □