2005

60/120

# 第1問

[解] $(x^3)'=3x^2$ より. $x=t$ $(t>0)$ における接線$l$, 法線$m$は

$$\begin{cases} l: y=3t^2x-2t^3 \\ m: y=\dfrac{-1}{3t^2}(x-t)+t^3 \end{cases}$$

だから $Q\left(\frac{2}{3}t, 0\right)$ $R\left(0, t^3+\frac{1}{3t}\right)$ である.

$f(t)=\dfrac{OR}{OQ}$ として $t>0$ から

$$f(t)=\frac{t^3+\frac{1}{3t}}{\frac{2}{3}t}=\frac{3t^4+1}{2t^2}$$

$p=t^2$ $(p>0)$ とかきかえる. $p>0$ から AM-GM.

$$f(t)=\frac{3p^2+1}{2p}=\frac{1}{2}\left(3p+\frac{1}{p}\right)\geqq\sqrt{3p\frac{1}{p}}=\sqrt{3} \quad /\!/$$

等号成立は $p=\frac{\sqrt{3}}{3}$ つまり $t=\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ の時

$\sqrt{3}+\sqrt{3}$

# 第 2 問

[解] $z \neq -2i$ が必要. 以下このもとで考える.

$$2(z+i) = (z+2i)\bar{z}$$

$$|z|^2 + 2i\bar{z} - 2z - 2i = 0$$

$z = x+yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ とおく.

$$x^2+y^2+2i(x-yi)-2(x+yi)-2i=0$$

$$(x^2+y^2+2y-2x)+i(2x-2y-2)=0$$

$x, y \in \mathbb{R}$ から

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x+2y=0 & \cdots ① \\ 2(x-y-1)=0 & \cdots ② \end{cases}$$

② から $y = x-1$ だから. ① に代入

$$x^2+(x^2-2x+1)-2x+2(x-1)=0$$

$$2x^2-2x-1=0$$

$$\therefore x = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3})$$

② とあわせて.

$$(x, y) = \left(\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}, \frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}\right) \quad (複号同順)$$

だから

$$z = \frac{1\pm\sqrt{3}}{2} + \frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}i \quad ( \,〃\, )$$

\#

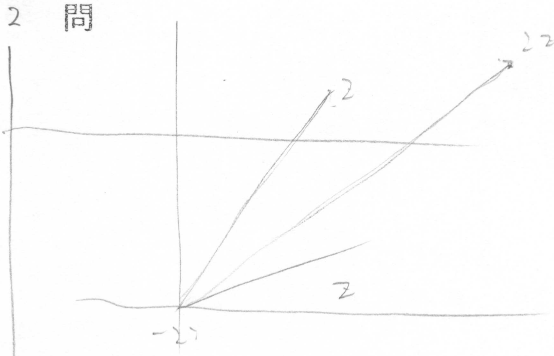
これは $z \neq -2i$ をみたす.

[この時.

$$2(z+i) = \{(1\pm\sqrt{3})+(1\pm\sqrt{3})i\}$$

$$|z|^2+2i\bar{z} = 2+\{(-1\pm\sqrt{3})+(1\pm\sqrt{3})i\}$$

であってそう]



$x = \frac{1\pm\sqrt{1+2}}{2}$

$1+$

$\frac{3}{4}$

$-\bigcirc \; i \cdot 2i$

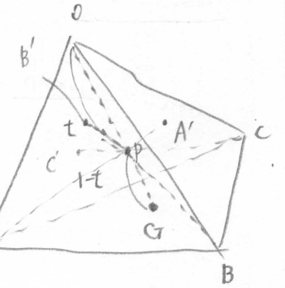
第 3 問

[解]

[解] 点Xに対し $\overrightarrow{OX}=\vec{x}$ と表すことにすると $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ は1次独立である。

$$\vec{p}=t\,\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

$$=t\,\vec{g}$$




…*

又、A'は平面OBC上にあるので $\vec{a'}=\alpha\vec{b}+\beta\vec{c}$ とおける。さらにAP上の点でもあるので $\vec{a'}=\vec{a}+k(t\vec{g}-\vec{a})$ ともおける $(\alpha.\beta.k\in\mathbb{R})$

*から係数比較して

$$0=1-k+\frac{kt}{3} \qquad \therefore k=\frac{3}{3-t}$$

だから

$$\vec{a'}=a+\frac{3}{3-t}(t\vec{g}-\vec{a})$$

$$=\frac{t}{3-t}(\vec{b}+\vec{c})$$

同様に

$$\vec{b'}=\frac{t}{3-t}(\vec{a}+\vec{c})$$

$$\vec{c'}=\frac{t}{3-t}(\vec{a}+\vec{b})$$

である。

$$\overline{A'B'}=\left|\frac{t}{3-t}\right||\vec{a}-\vec{b}|=\frac{t}{3-t}\overline{AB}$$

$$\overline{B'C'}=\frac{t}{3-t}\overline{BC}$$

$$\overline{C'A'}=\frac{t}{3-t}\overline{CA}$$

から たしかに $\triangle ABC \propto \triangle A'B'C'$ で 相似比は

$\frac{t}{3-t}:1=\triangle A'B'C':\triangle ABC$ である //

$$(3-t)a-3a+\frac{t}{\square}(a+b+c)$$

0.43429

# 第 5 問

0.434

底の変換公式

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$n < \int \frac{\log x}{\log_{10} e}\,dx$$

$$n < \frac{1}{\log_{10} e}\int_{10}^{100} \log x\,dx$$

$$tn < [x(\log x - 1)]_{10}^{100}$$

$$x\,100\left(\frac{2}{t}-1\right)$$

$$-10\left(\frac{1}{t}-1\right)$$

$$\frac{1}{t}\left(\frac{190}{t}-90\right)$$

$$87 \overline{)200} = 2.29884$$

$\dfrac{\log_e x}{\log_{10} e}$ $\dfrac{\log_{10} 100}{\log_{10} e}$

## 第 5 問

[解] $n < \dfrac{1}{\log 10}\left[x(\log_e x - 1)\right]_{10}^{100}$ をみたす max $n \in \mathbb{N}$

をもとめれば良い。$t = \log_{10} e$, …… $= A$ とおいてセイリする

$$A = t\left[100\left(\frac{2}{t}-1\right) - 10\left(\frac{1}{t}-1\right)\right]$$

$$= \frac{1}{t}\left\{190\frac{1}{t} - 90\right\} = 190 - 90t$$

$p = \frac{1}{t}$ とおくと $0.434 < t < 0.435$ で、同区間で A は t の単調減少関数で

$$190 - 90 \cdot 0.435 < A < 190 - 90 \cdot 0.434$$

$$150.85 < I < 150.94$$

より $n = 150$ //

797.15

801.2?

798, 799, 800, 801

$2\log_e 10^2$

$\frac{190}{t^2}$ $\left(\frac{2}{t}-1\right) - 10\left(\frac{1}{t}-1\right)$ $\frac{1}{t}\left(\frac{190}{t} - 90\right)$

$\frac{9}{38}$ $\frac{19}{19}$ 2

$\frac{1}{p}(19p - 9)$

$2\log_e 10$

$\dfrac{\log_e 100}{\log_e x}$

$\dfrac{200}{\cancel{1000}}$ $\dfrac{\cancel{435}}{87}$ ~ $\dfrac{100}{\cancel{1000}}$ $\dfrac{\cancel{434}}{217}$

$200 \div 87 = 2.298$

$100 \div 217 = 23.04$

22.98 ~ 34.7

$\dfrac{1}{\log_{10} e}$

34.7

2.3

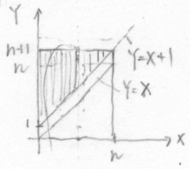
437

2.30

京後05 6

# 第 6 問

[解] 表の出た100円玉の枚数 $X$, 500円玉の枚数 $Y$とする。$X \leq Y-1$となる確率をもとめれば良い。対称性から,




$$P(X+1 \leq Y) = P(X \geq Y) \quad \cdots ①$$

で これらは右図より全ての場合をつくすから

$$P(X+1 \leq Y) + P(X \geq Y) = 1 \quad \cdots ②$$

①,②から

$$P(X+1 \leq Y) = \frac{1}{2}$$

(表裏の対称性から,

$$P(X+1 \leq Y) = P((n-X)+1 \leq n+1-Y) = P(X \geq Y)$$

(100円玉はウラ $n-X$, 500円は $n+1-Y$))

[解2] 1玉の500円玉に注目し, その表裏で場合分けする。残りn枚中,表の枚数 $X$, $Y$とする。

1° 表の時

残りn枚ずつ投げて, $X \leq Y$となれば良く, 確率 $P(X \leq Y)$

2° 裏の時

残りn枚ずつ投げて, $X < Y$となれば良く, 確率 $P(X < Y)$

対称性から $P(X<Y) = P(X>Y)$ だから,

$$\frac{1}{2}\left(P(X \leq Y) + P(X<Y)\right) = \frac{1}{2}\left(P(X \leq Y) + P(X>Y)\right) = \frac{1}{2}$$

[解3] 500円がk枚表である確率 $p_k$, 100円がi 〃 $q_i$ とおくと.

$$p_k = {}_{n+1}C_k \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}, \quad q_i = {}_nC_i \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

で

$$P = \sum_{k=1}^{n+1} p_k (q_0 + \cdots + q_{k-1})$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} \sum_{k=1}^{n+1} {}_{n+1}C_k ({}_nC_0 + {}_nC_1 + \cdots + {}_nC_{k-1}) \quad \cdots ①$$

ここで, $A = \sum_{k=1}^{n+1} {}_{n+1}C_k ({}_nC_0 + \cdots + {}_nC_{k-1})$とおくと, $A$は$(1+x)^{n+1}(1+x)^n$の展開項のうち, $n+1$次以上のものの和である。

$$(x+1)^{2n+1} = {}_{2n+1}C_0 x^{2n+1} + \cdots + {}_{2n+1}C_{2n} x + {}_{2n+1}C_{2n+1}$$

$x=1$として, ${}_{2n+1}C_{2n+1-k} = {}_{2n+1}C_k$から.

$$2^{2n+1} = 2({}_{2n+1}C_0 + \cdots + {}_{2n+1}C_n) = 2A$$

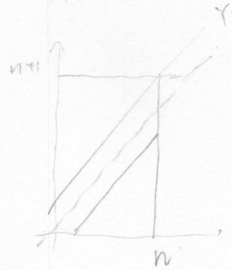
$$\therefore A = 2^{2n} \quad \cdots ②$$

①,②から.

$$P = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} 2^{2n} = \frac{1}{2}$$

X Y

$X \leq Y+1$




(0,0) → (n, n+1)

100 500 → 100 500

表X 表Y → 表n−X 表n+1−Y

$X \leq Y-1 \iff$

$P(X+1 \leq Y) = P(n+1-X \leq n+1-Y)$

$\iff P(X \geq Y)$