

第 1 問

【解】 $g_n(x) = 4nx(1-x)$ とおく。 $y = g_n(x)$ のグラフは下図

ここで、 α, β は $4nx(1-x) = 1$ の2解

で、 $\alpha < \beta$ とおく。又、 $h(x)$ を

$$h(x) = n \int_0^x f(g_n(x)) dx$$

で定める。グラフから

$$h(x) = n \int_0^x g_n(x) dx + n \int_\beta^1 g_n(x) dx$$

$$G_n(x) = -\frac{4n}{3}x^3 + 2nx^2 \quad \text{とおく。} \quad G_n'(x) = g_n(x) \text{ から}$$

$$h(x) = n(G_n(\alpha) - G_n(0)) + G_n(1) - G_n(\beta) \quad \dots ①$$

又、

$$G_n(1) = \frac{2}{3}n, \quad G_n(0) = 0 \quad \dots ②$$

ここで、 α, β の定義から

$$\alpha + \beta = 1, \quad \alpha\beta = \frac{1}{4n}, \quad \beta - \alpha = \frac{\sqrt{4n^2 - 4n}}{2n} = \frac{\sqrt{n^2 - n}}{n}$$

よって、

$$G_n(\alpha) - G_n(\beta) = 2n(\alpha^2 - \beta^2) - \frac{4n}{3}(\alpha^3 - \beta^3)$$

$$= (\alpha - \beta) \left[2n(\alpha + \beta) - \frac{4n}{3}(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) \right]$$

$$= -\frac{\sqrt{n^2 - n}}{n} \left\{ 2n - \frac{4n}{3} \left(1 - \frac{1}{4n} \right) \right\}$$

$$= -\frac{\sqrt{n^2 - n}}{n} \left(\frac{2}{3}n + \frac{1}{3} \right) \quad \dots ③$$

②、③を①に代入

$$h(x) = n \left[\frac{2}{3}n - \frac{\sqrt{n^2 - n}}{3n} (2n+1) \right]$$

$$= \frac{1}{3} \left[2n^2 - \sqrt{n^2 - n} (2n+1) \right]$$

$$= \frac{1}{3} \frac{4n^4 - (n^2 - n)(4n^2 + 4n + 1)}{2n^2 + \sqrt{n^2 - n} (2n+1)}$$

$$= \frac{1}{3} \frac{4n^4 - 4n^3 + n^2 + n}{2n^2 + \sqrt{n^2 - n} (2n+1)}$$

$$= \frac{1}{3} \frac{3 + \frac{1}{n}}{2 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}} (2 + \frac{1}{n})}$$

$$\longrightarrow \frac{1}{4} \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$4nx^2 - 4nx + 1 = 0$$

$$\frac{1}{4n} \left(2n \pm \sqrt{(2n)^2 - 4n} \right)$$

$$4nx(1-x) = 1 \quad \alpha = \frac{2 \pm \sqrt{n^2 - n}}{4n}$$

$$4nx^2 - 4nx + 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{4n} \left[2n \pm \sqrt{4n^2 - 4n} \right]$$

$$4nx^2 - 4nx + 1 = 0$$

$$4n^2$$

$$\frac{1}{6} \left[1 - \frac{1}{4n} + 6 \right]$$

$$\frac{-(4n^3 + 4n^2 + 4n^2 + n^2 + n)}{2n^2} \quad 4 - 4 + 1 = 1$$

$$4n^2 - (4n^4 - 4n^3 + n^2 - n)$$

$$2n^2 -$$

$$\frac{4n^4 + 4n^3 + n^2}{-4n^3 - 4n^2 - n}$$

$$(n^2 - n) (2n+1) \quad 4n^2 + 4n + 1$$

第 問

第 2 問

[解] 与式の両辺2乗しても良し(∵両辺0以上)

$$|(d+it) + (t+1)|^2 \leq 1$$

$$|d+it|^2 + (t+1)\{d+it+\bar{d}-it\} + (t+1)^2 \leq 1$$

$$|d|^2 + \underbrace{|it|^2}_{t^2} + 2it + d\bar{d} + (t+1)(d+\bar{d}) + t^2 + 2t \leq 0$$

$$|d|^2 + (\bar{d}-d)it + (t+1)(d+\bar{d}) + 2t^2 + 2t \leq 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\operatorname{Re}(d) = X, \operatorname{Im}(d) = Y \text{ とおく}$$

$$d+\bar{d} = 2X, (\bar{d}-d)i = 2Y, |d|^2 = X^2 + Y^2$$

だから①に代入して

$$X^2 + Y^2 + 2Yt + (t+1)2X + 2t^2 + 2t \leq 0$$

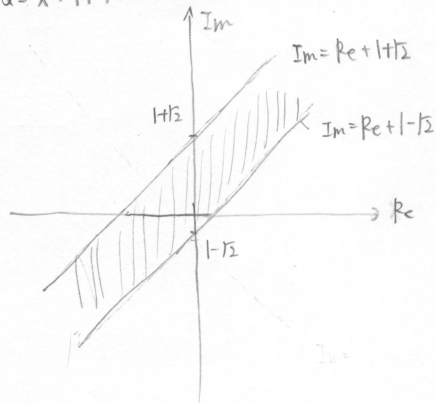
$$2t^2 + 2(X+Y+1)t + X^2 + 2X + Y^2 \leq 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

左辺 $f(t)$ とし、②を満たす $t \in \mathbb{R}$ の存在条件は $f(t)=0$ の判別式 $D \geq 0$ 以上であること

$$D/4 = (X+Y+1)^2 - 2(X^2 + 2X + Y^2) \geq 0$$

$$(X-Y+1+\sqrt{2})(X-Y+1-\sqrt{2}) \leq 0$$

$d = X+Yi$ だから、図示した図斜線部(境界含む)



(※) $d = \frac{1}{2} - i$ (境界上)

$$|(1+i)t + \frac{1}{2}|^2 \leq 1$$

$$|t\bar{i} + \frac{1}{2}|^2 \leq 1$$

$$t^2 + (t+\frac{1}{2})^2 \leq 1$$

$$2t^2 + 2\sqrt{2}t + 1 \leq 0 \Rightarrow 0 \leq t \leq \sqrt{2}$$

$$\bar{d} - d = X - Yi - (X + Yi)$$

$$X + (X - Yi) - (X + Yi) = 2X - 2Yi$$

$$\frac{d - \bar{d}}{i} = 2Y$$

$$(\bar{d} - d)i = X^2 + Y^2 + 2XY + 2X + 2Y + 1 - 2X^2 - 4X - 2Y^2$$

$$2t^2 + 2t + 2t + 2$$

$$-X^2 - Y^2 + 2XY - 2X + 2Y + 1 \geq 0$$

$$X^2 + Y^2 + 1 + 2X + 2Y + 2XY - 2X^2 - 4X - 2Y^2$$

$$-X^2 - Y^2 - 2X + 2Y + 2XY + 1 \geq 0$$

$$X^2 + Y^2 + 2X - 2Y - 2XY - 1 \leq 0$$

$$(X - Y + 1)(X - Y + 1)$$

$$X^2 + Y^2 - 2XY + 2X - 2Y - 1 \leq 0$$

$$(X - Y + t)(X - Y + \Delta) \leq 0$$

$$-t - \Delta = -2$$

$$t + \Delta = 2$$

$$t\Delta = -1$$

$$t + \Delta = 2$$

$$t\Delta = -1$$

$$2t^2 - 2t - 1 = 0$$

$$2t = 1 \pm \sqrt{5}$$

問 第 四

第 3 問

第 問

第 4 問

[解] $OX=OA=t$ とおく ($0 \leq t$)

$$\tan 44^\circ = \frac{t}{t+1}$$

$$\tan 45^\circ = 1$$

から

$$\tan 1^\circ = \tan(45^\circ - 44^\circ)$$

$$= \frac{\tan 45^\circ - \tan 44^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 44^\circ} = \frac{1 - \frac{t}{t+1}}{1 + \frac{t}{t+1}} = \frac{1}{2t+1}$$

また、題意より

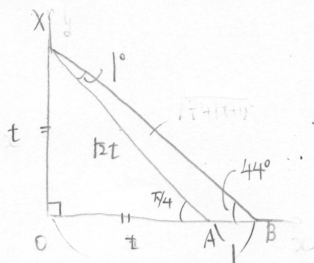
$$0.01745 < \frac{1}{2t+1} < 0.01746$$

$$57.2 < 2t+1 < 57.3$$

$$28.1 < t < 28.15$$

よって

$$t = 28.1 \text{ [m]}$$



$$\tan 44^\circ = \frac{t}{t+1}$$

$$\tan 45^\circ = 1$$

$$\begin{array}{r} 57.3 \\ 1745 \overline{) 100000} \\ \underline{8725} \\ 12750 \\ \underline{12215} \\ 5350 \\ \underline{3490} \\ 18600 \end{array}$$

第 問

第 5 問

[解] (1) a を任意に固定すると、 b, c は a の値によって決まる。したがって、

求める場合の数は

$$S = \sum_{1 \leq a \leq n} (d-a)^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

である。 $d-a = k$ と固定する。 $(1 \leq k \leq n-1)$ の時、 (a, d) の組は a を決めれば一意に定まり、

$$a = 1, 2, \dots, n-k$$

の $n-k$ 通りである。したがって、 k を固定した時の (a, b, c, d) の組は $k^2(n-k)$ 個あるから、

$n \geq 2$ の時

$$S = \sum_{k=1}^{n-1} k^2(n-k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} (-k^3 + nk^2)$$

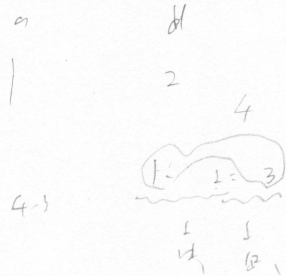
$$= -\frac{1}{4}n^2(n-1)^2 + \frac{n}{6}(n-1) \cdot n(2n-1)$$

$$= \frac{1}{12}n^2(n-1)[2(2n-1) - 3(n-1)]$$

$$= \frac{1}{12}n^2(n-1)(n+1) \text{ 通り}$$

これは $n=1$ の時の 0 通りにも対応している。おて、

$$S = \frac{1}{12}n^2(n-1)(n+1) \text{ 通り}$$



$$\frac{9 \cdot 2 \cdot 4}{12}$$

$$\frac{1}{12} \cdot 9 \cdot 2 \cdot 4$$

第 6 問

[解] 対称性から、問題を見か

す正方形のうちの第一象限にある

ものを $A(n)$ とし

$$4A(n) = N(n) \quad \dots \textcircled{1}$$

又 $y = \sqrt{n^2 - x^2}$ は $0 \leq x \leq n$ で単調

減少だから

$$A(n) = \sum_{k=1}^n \left[\sqrt{n^2 - k^2} \right]$$

である

$$\sqrt{n^2 - k^2} - 1 < \left[\sqrt{n^2 - k^2} \right] \leq \sqrt{n^2 - k^2}$$

$n > 0$ から

$$\frac{1}{n} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2} \right] - \frac{1}{n} < \frac{\left[\sqrt{n^2 - k^2} \right]}{n^2} \leq \frac{1}{n} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2} \right]$$

k に x として置き換えて、

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2} \right] - \frac{1}{n} < A(n) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2} \right]$$

ここで $n \rightarrow \infty$ のとき

$$\rightarrow \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{\pi}{4}$$

だから、ワイヤールの定理から、 $n \rightarrow \infty$ のとき

$$\frac{A(n)}{n^2} \rightarrow \frac{\pi}{4} \quad \dots \textcircled{2}$$

①、②から

$$\frac{N(n)}{n^2} \rightarrow \pi \quad (n \rightarrow \infty) \quad \square$$