

第 1 問

[解] 点 X は $\vec{AX} = s\vec{AB} + t\vec{AC}$ と表わされ、 $\vec{AB}, \vec{AC}$ は一次独立。 $k=1, 2, 3$

$$\vec{P_k} = t_k \vec{AB}$$

$$\vec{Q_k} = s_k \vec{AB} + (1-s_k) \vec{AC}$$

$$\vec{R_k} = r_k \vec{AC}$$

よって $\triangle P_k Q_k R_k$ の重心 G_k は

より

$$\vec{G_k} = \frac{1}{3} [(t_k + s_k) \vec{AB} + (1 + r_k - s_k) \vec{AC}]$$

よって $G_1 = G_2$ のとき

$$\begin{cases} t_1 + s_1 = t_2 + s_2 & \dots ① \\ 1 + r_1 - s_1 = 1 + r_2 - s_2 & \dots ② \end{cases}$$

よって $t_2 - t_1 = s_1 - s_2 = r_1 - r_2$ であり、 $|\vec{AB}| = |\vec{AC}| = |\vec{BC}|$ より

$$|\vec{P_1 P_2}| = |(t_2 - t_1) \vec{AB}| = |(r_1 - r_2) \vec{AC}| = |\vec{R_1 R_2}| \dots ③$$

$$|\vec{Q_1 Q_2}| = |(s_1 - s_2) (\vec{AB} - \vec{AC})| = |(r_1 - r_2) \vec{BC}| = |\vec{R_1 R_2}| \dots ④$$

③, ④より

$$|\vec{P_1 P_2}| = |\vec{Q_1 Q_2}| = |\vec{R_1 R_2}| \quad \square$$

問 第



第 2 問

[解] $\angle ADB = \theta$ ($\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{2\pi}{3}$) とおく。これから直線 BD に下した垂足 H と

おく。四面体 $ABCD$ の体積が最大の時、

の $\triangle ABD$ を底面とみた時の高さは

$\overline{CH}$ である。

△ ABD に正弦定理を用いて

$$\overline{AD} = \frac{\sin(\frac{2\pi}{3} - \theta)}{\sin \theta}$$

△ CH について右図を参照して

$$\overline{CH} = \sin(\theta - \frac{\pi}{3})$$

以上から、四面体 $ABCD$ の体積 $V(\theta)$ と

して $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{2\pi}{3}$ のとき

$$V(\theta) = \left(\frac{1}{2} \overline{AD} \cdot \overline{AB} \sin \frac{\pi}{3} \cdot \overline{CH} \right) \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sin(\frac{2\pi}{3} - \theta)}{\sin \theta} \sin(\theta - \frac{\pi}{3}) \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{-\frac{1}{2} [\cos \frac{\pi}{3} - \cos(\pi - 2\theta)]}{\sin \theta} \cdot \frac{1}{3}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{\frac{1}{2} + \cos 2\theta}{\sin \theta} \cdot \frac{1}{3}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{16} \cdot \frac{1 + 2(1 - 2s^2)}{s} \cdot \frac{1}{3} \quad (s = \sin \theta)$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{16} \left(\frac{3}{s} - 4s \right) \cdot \frac{1}{3}$$

$\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{2\pi}{3}$ から $\frac{\sqrt{3}}{2} < s \leq 1$ に注意する。

$$\frac{dV}{ds} = -\frac{\sqrt{3}}{48} \left(-\frac{3}{s^2} - 4 \right) = \frac{\sqrt{3}}{48 s^2} (3 + 4s^2) > 0$$

すなわち V は s の単調増加関数で、 $s=1$ すなわち D が AC の中点の時

$$\max V = \frac{\sqrt{3}}{48}$$

$$p=6$$

$$1, 3, 5, 7, 9$$

$$9 >$$

$$\sqrt{\frac{4-3}{6}}$$

$$1 -$$

$$c(2\theta - \pi)$$

$$\frac{2}{3} + \sim \frac{4}{3}$$

$$\frac{\pi}{3} - (\frac{2}{3}\pi - \theta)$$

$$\theta - \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{3} - 2\theta$$

$$2 - \theta - \frac{\pi}{3}$$

[本問のミズ]

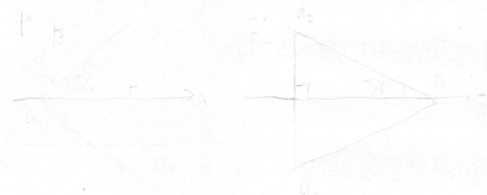
・全図付のすてしう...

$$\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$$

第 3 問

【解】 (複素平面上)

以下の二つの図を下の図に示す。



【証明】

$$a_2 = 1 + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$

$$a_3 = 1 + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$

よって、

$$a_1(a_2 + a_3) = 1 \cdot \left(1 + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) + 1 + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\right) = -1$$

$$\therefore 0 = -1$$

よって、(6)は正しい。

【補足】

$$a_1 = 0, \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$a_2 = 0, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

よって、(6)は正しい。 $a_1 = 1 - \sqrt{2}$ で $(a_1) = (3 - \sqrt{2})$

以上が OK!

第 3 問

[解] 解と係数の関係から.

$$\begin{cases} d_1 d_2 d_3 = -1 \\ d_2 d_3 + d_3 d_1 + d_1 d_2 = b \\ d_1 + d_2 + d_3 = -a \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}$$

である. $a, b \in \mathbb{R}$ から, $d_1 \wedge d_2$ のうち, 1 つ又は 3 つが実数の場合と問われれば良い.

1° $d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}$

是直線から

$$\begin{cases} d_1 = d_2 \pm \sqrt{3} \\ d_2 = d_3 \pm \sqrt{3} \\ d_3 = d_1 \pm \sqrt{3} \end{cases}$$

だが, 0 を足すと $0 = (0 \neq \text{実数})$ となり不適.

2° $d_1 \in \mathbb{R}, d_3, d_2 \in \mathbb{C}$ の時

この時を考えると, 又, $a, b \in \mathbb{R}$ から $d_3 = \overline{d_2}$ となる. 対称性から d_2 の虚部が 0 以上になる. ガウス平面上で, $d_1 \wedge d_3$ は右の

ようになる. したがって,

$$\begin{cases} d_2 = d_1 \pm \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ d_3 = d_1 \pm \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases} \quad (\text{複号同順}) \quad \dots \textcircled{2}$$

とおける. ①の第 1 式に代入して, 得られる.

$$d_1^3 \pm 3d_1^2 + 3d_1 + 1 = 0$$

$$\begin{cases} (d_1 + 1)^3 = 0 & (\text{複号正}) \\ (d_1 - 1)^3 = -2 & (\text{複号負}) \end{cases} \quad \therefore d_1 = -1, 1 - \sqrt[3]{2}$$

よって, ②から

$$(d_1, d_2, d_3) = (-1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) \quad (1 - \sqrt[3]{2}, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)$$

と①に代入して,

$$(a, b) = (0, 0) \quad (3 \cdot \sqrt[3]{2}, 3 \cdot \sqrt[3]{4})$$

$$\begin{aligned} d_2 &= d_1 \pm \sqrt{3} \\ d_3 &= d_2 \pm \sqrt{3} \\ d_1 &= d_3 \pm \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$d_1(A^2 + \frac{3}{4}) = -1$$

$$d_1(A^2 + \frac{3}{4}) = -1$$

$$d_1(d_1^2 \pm 3d_1 + \frac{12}{4}) = -1$$

$$d_1^3 \pm 3d_1^2 + 3d_1 + 1 = 0$$

$$d_1^3$$

$$\frac{-1}{d_1}$$

$$1 - \frac{1}{2}$$

第 4 問

[解] $a_{n+1} > \frac{1}{2}a_n - p$ となる $n \in \mathbb{N}$ がなく仮定すると

$$a_{n+1} \leq \frac{1}{2}a_n - p$$

が任意の $n \in \mathbb{N}$ で成り立つ。変形して

$$a_{n+1} + p \leq \frac{1}{2}(a_n + p)$$

くり返し用いて

$$a_n + p \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(a_1 + p) - p$$

だから、 $a_1, p > 0$ から十分大きな n に対して $a_n < 0$ となり矛盾。おて示した。

$$a_n + p \leq \frac{1}{2}(a_n + p)$$

$$-2p \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(a_1 + p) - p$$

第 5 問

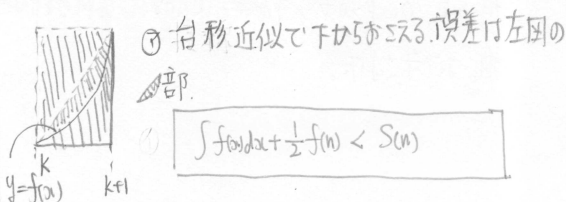
★面積法の研究

面積法による誤差には、大別して以下の 2 パターンがある

- 1° 関数が上に凸な時 (例: $y = \log x$)
- 2° " 下 " (例: $y = x^a$)

1° の時、誤差の項は収束していくので、台形近似までで大分正確に評価できることが予想される

2° の時、誤差の項は発散するので、工夫が必要



$$S_n = \sum_{k=1}^n \left\{ \left(\frac{2k}{2n} \right)^{100} - \left(\frac{2k-1}{2n} \right)^{100} \right\}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{(2k)^{100} - (2k-1)^{100}}{(2n)^{100}}$$

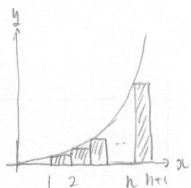
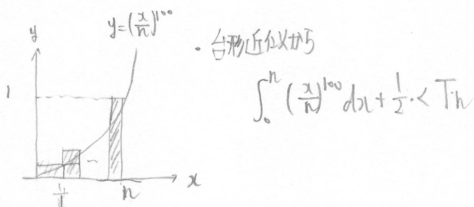
⇒ さいてくるのは、区間分割から、 k^{99} の項.

$$S_n \approx \sum_{k=1}^n \frac{100 \cdot (2k)^{99}}{(2n)^{100}} = 50 \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \left(\frac{k}{n} \right)^{99}$$

$$\rightarrow 50 \int_0^1 x^{99} dx = \frac{1}{2}$$

⇒ およそ

▷ 面積法だと... $T_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} \right)^{100}$ と評価したい



$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} \right)^{100}$$

$t =$

$$\int_0^1 x^{100} dx$$

$$\frac{(101)}{(101)}$$

第 5 問

第 5 問

100C

[解] $f(x) = x^{100}$ である。 $k \in \mathbb{N}$ に対する平均値の定理。

$$f\left(\frac{2k}{2n}\right) - f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) = \frac{1}{2n} f'(c) \left(\frac{2k-1}{2n} < c < \frac{2k}{2n}\right)$$

13C 計算。

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \left(\frac{k}{2n}\right)^{100} = \sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{2k}{2n}\right)^{100} - \left(\frac{2k-1}{2n}\right)^{100} \right]$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2n} f'(c)$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f'(x) dx = \frac{1}{2} (f(1) - f(0)) = \frac{1}{2}$$

100x

$$\left(\frac{x}{2n}\right)^{100} = \frac{100}{2n} \left(\frac{x}{2n}\right)^{99}$$

100. x

第 6 問

[解] a_1 のえらひ方が 6 通り. a_1 に対し a_{i+1} のえらひ方が 3 通り

だから.

$$6 \cdot 3^6 = 4374 \text{ 通り}$$