

第 1 問

[解] β に1枚だけ入っているのは、 k 枚目にとり出した札だけ
 β に入っている時 ($k=2, 3, \dots, n$) である。とり出した n 枚の順番を、
 左から n 枚の札をならべた列と1対1対応させて考える。

β に入っている札が l ($l=1, 2, \dots, n$) の時、他の $n-1$ 枚のなるべ方は、

$\{1, 2, \dots, l-1, l+1, \dots, n\}$ の1通りだけである。よって求めるのは、

$k=l+1, l+2, \dots, n$ であるから、求める確率 $Q(l)$ は

$$Q(l) = \frac{n-l}{n!} \quad (l=n \text{ の時もこれで良い})$$

よって、求める確率 $P(n)$ として、 $n \geq 2$ の時、

$$P(n) = \sum_{l=1}^n \frac{n-l}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{l=0}^{n-1} l = \frac{1}{2(n-2)!}$$



1, 2

2, 1

$1, \dots, n-1$

$$\frac{1}{2!} - 1$$

問 第

第 2 問

[解] $\begin{cases} x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1 \quad \dots ① \\ (x-a)^2 + y^2 = b \quad \dots ② \quad (b > 0) \end{cases}$

①, ②のx軸に関する対称性

から, ①, ②が (a, β) ($\beta > 0$) と

解に持てば, $(a, -\beta)$ も解に

なる. 従って, ①と②に代入して得ら

れるxの2次方程式

$$(x-a)^2 + 4(1-x^2) = b \quad \dots ③$$

が $-1 < x < 1$ に2異なる解を持てば良い. ③から

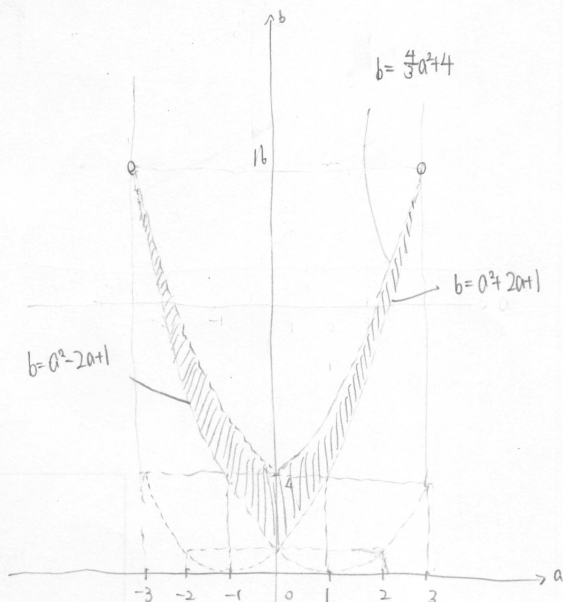
$$-3x^2 - 2ax + a^2 + 4 - b = 0$$

$$3x^2 + 2ax - a^2 - 4 + b = 0 \quad \dots ④$$

④の左辺 $f(x)$, 判別式 $D \geq 0$ して, 次の条件は,

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ \text{端点: } f(1) > 0, f(-1) > 0 \\ \text{軸: } -1 < -\frac{a}{3} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 3(-a^2 - 4 + b) > 0 \\ -a^2 + 2a - 1 + b > 0 \\ -a^2 - 2a - 1 + b > 0 \\ -3 < a < 3 \end{cases} \quad \dots ⑤$$

⑤を図示して, 下図斜線部 (境界含まず)



$$y^2 = 4(1-x^2)$$

$$4 > b - a^2$$

$$a^2 + 4 > b$$

$$4a^2 + 12 - 3b > 0$$

$$4a^2 + 12 > 3b$$

$$\frac{4}{3}a^2 + 4 > b$$

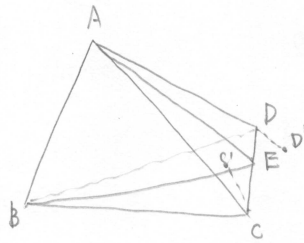
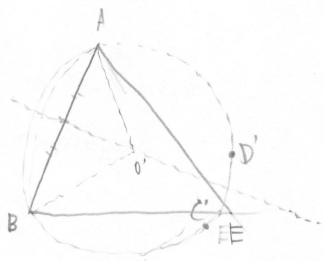
$$a^2$$

$$\left(x + \frac{a}{3}\right)$$

$$b > a^2 + 2a + 1$$

$$a + b + 1$$

第 3 問



第 3 問

【解】平面 α が平面 ABC に一致する時、 C' は C と一致するが、

各面が鋭角三角形だから、 D は平面 ABC 上で A を通り
辺 BC に垂直な直線 l_1 と、 B を通り辺 AB に垂直な直線 l_2 の
間の領域にある。同様にして、 D' は右下図のように3組の平行
直線 (l_1, l_2) (m_1, m_2) (n_1, n_2) で囲まれた領域内にある。

m_1 と n_2 , n_2 と l_2 , l_1 と m_2 の交点を各々 P, Q, R とすると、6点

A, B, C, P, Q, R は同一円周にある

これは $\angle CAP + \angle CBP = \pi$,

$\angle ABQ + \angle ACQ = \pi$,

$\angle BCR + \angle BAR = \pi$ から明らか。

したがって、 D' は $\triangle ABC$ の外接円の
内部にある。 $\angle C$ が鋭角だから、

$$\angle AC'B = \angle ACB < \angle AD'B \quad \text{①}$$

次に、平面 α を平面 ABD に

一致するまで回転させる時、

条件から辺 AB と辺 CD は垂直で

ないので、 C' と D' は一致しない。②

さらに、平面 α が平面 ABD に一致する時、上と同様に

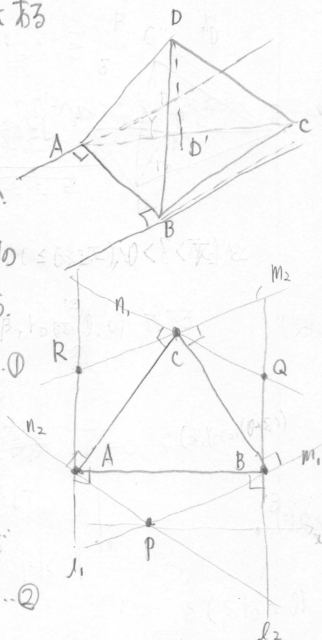
$$\angle AC'B > \angle ADB = \angle AD'B \quad \text{③}$$

ここで、 $\angle AC'B = \theta_1$, $\angle AD'B = \theta_2$ とおく。①、③から、 $f = \theta_1 - \theta_2$

は負から正の値に連続的に変化するから、 $\theta_1 = \theta_2$ となることか

がある。④ ②、④から、異4点 A, B, C, D が同一円周上にいる

ことがある。図



第 4 問

▷ $f_{k+1}(x) = x^{k+1} + \dots + a_0x + a_0$ を n 次式に分解

$$\circ f_{k+1}(x+1) - f_{k+1}(x) = g_k(x) \Rightarrow \text{ア外}$$

$$\Rightarrow \circ \underbrace{f_{k+1}(x)}_{\in \mathbb{Q}} = \underbrace{x^{k+1}}_{\in \mathbb{Q}} + \underbrace{a_0}_{\in \mathbb{Q}} f_k(x)$$

→ 仮定を用いると $k+1$ 個の $\mathbb{Q}$ に $\neq 1$ $a_0 f_k(x) \in \mathbb{Q}$ (使いに $\in$)

$$\circ f_{k+1}(x) = f_k(x) \cdot x + a_0$$

$$\rightarrow \text{仮定を用いると } k+1 \text{ 個の } \mathbb{Q} \text{ に } \neq 1 \cdot f_k(x) \cdot x + a_0 \in \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow a_0 \in \mathbb{Q} \text{ かつ } 0 \neq a_0 \text{ の時 } k+1 \text{ 個の } \mathbb{Q} \text{ に } \neq 1 \cdot f_k(x) \in \mathbb{Q} (?)$$

★いずれも a_0 が全く使えず、アウトなかんじである

▷ そこで α を何か有理数にしたい。 $f_{k+1}(\alpha) = r_i$ から、

$$f_{k+1}(\alpha) - r_i = 0, \text{ つまり } f_{k+1}(x) - r_i \text{ は } (x - \alpha) \text{ を因数}$$

に持ち、

$$f_{k+1}(x) = (x - \alpha) f_k(x) + r_i$$

と表せる $\Rightarrow$ 終了

解が分かっている。因数分解できる

1. $\mathbb{Q}$

$$\begin{aligned} & \boxed{} + \\ & \boxed{} + \\ & \boxed{} + \end{aligned}$$

$$f_k(x) \in \mathbb{Q}$$

$$x^2 + \sqrt{2}x + \sqrt{3}$$

$$\sqrt{2}x + 1$$

$$x^2 + \sqrt{2}x + \sqrt{3}$$

$$(x + \sqrt{2})x + \sqrt{3}$$

$$(x + \sqrt{2})x + \sqrt{3} \in \mathbb{Q}$$

$$f = g_k(x)$$

第 4 問

[解] x^n の係数が k 次の n -次式 $f_n(x)$ と表す。

1° $n=1$ の時

$f_1(x) = x + a$ とおけるから、 $f_1(q_i) = q_i + a \in \mathbb{Q}$ なら $a \in \mathbb{Q}$ であるから成立

2° $n=k$ の時の成立を仮定する ($k \in \mathbb{N}$)

$f_{k+1}(x) = f_k(x) \cdot (x - q_{k+1})$ と表すことができる
異なる有理数 $q_1 \sim q_{k+1}$ に対し、 $f_{k+1}(q_i) = r_i$ ($i=1, 2, \dots, k+1$) と仮定する。ここで $r_i \in \mathbb{Q}$ である。すると、 $f_{k+1}(x) = (x - q_{k+1})f_k(x) + r_{k+1}$ とおけるから $x = q_i$ を代入して ($i=1, 2, \dots, k$)

$$r_i - r_{k+1} = (q_i - q_{k+1}) f_k(q_i)$$

$q_i \neq q_{k+1}$ ($i=1, 2, \dots, k$) だから

$$f_k(q_i) = \frac{r_i - r_{k+1}}{q_i - q_{k+1}} \in \mathbb{Q}$$

したがって仮定から、 $f_k(x)$ の係数は有理数。したがって、 $f_{k+1}(x)$ の係数も有理数で、 $n=k+1$ でも成立

以上から示された 同

$$f_k(q_i) =$$

$$\prod (x - q_i) = f_{k+1}(x)$$

第 5 問

$$\triangleright \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{a_n^2 + 2b_n^2}{2a_nb_n} = \frac{1}{2} \left(\frac{a_n}{b_n} + 2\frac{b_n}{a_n} \right)$$

C_{n+1} とおす.

$$\begin{cases} C_1 = \frac{3}{2}, C_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} + 2\frac{2}{3} \right) = \frac{17}{12} \\ C_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{17}{12} + 2\frac{12}{17} \right) = \frac{361}{408} \end{cases}$$

$\rightarrow \Delta$ とする.

$$\triangleright a_n^2 - 2b_n^2 = 1 \Rightarrow \left(\frac{a_n}{b_n} \right)^2 - 2 = \frac{1}{b_n^2}$$

b_n の極限 or a_n と b_n の漸化式 (ここ $\rightarrow \infty$)

$\Rightarrow b_n$ は増大する

$$a_{n+1}^2 = 2a_n^2 - 1$$

$\rightarrow$ 終了.

第 5 問

[解] $a_1=3, b_1=2$

$$a_{n+1} = a_n^2 + 2b_n^2, \quad b_{n+1} = 2a_n b_n$$

$$\begin{aligned} (1) \quad a_{n+1} - 2b_{n+1}^2 &= (a_n^2 + 2b_n^2)^2 - 2(2a_n b_n)^2 \\ &= a_n^4 + 4b_n^4 - 4a_n^2 b_n^2 \\ &= (a_n^2 - 2b_n^2)^2 \end{aligned}$$

だから、くり返し用いて、 $a_1^2 - 2b_1^2 = 9 - 8 = 1$ より

$$a_n^2 - 2b_n^2 = 1$$

(2) 漸化式と初期条件から、帰納的に a_n, b_n は正である。

$$(1) \text{ から } a_{n+1} = a_n^2 + 2b_n^2 > a_n^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

又、 $a_1=3>1$ であり、 $n=k \in \mathbb{N}$ で $a_k > 1$ と仮定すると、

$$a_{k+1} > 2 \cdot 1 - 1 = 1 \text{ から、} n=k+1 \text{ で } a_{k+1} > 1, \text{ 以上から}$$

帰納的に $a_n > 1$ である。両辺 $a_n > 0$ が成り立つから $a_n^2 > a_n$ ②。

①、②から

$$a_{n+1} > 2a_n - 1$$

$$a_{n+1} - 1 > 2(a_n - 1)$$

くり返し用いて、 $a_1=3$ から

$$(a_n - 1) > 2^{n-1} \cdot 2 = 2^n$$

おしい出しの原理から、 $a_n \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty) \dots \textcircled{3}$

(1) の式を両辺 $a_n^2 > 0$ でわって、④から、

$$1 - 2 \left(\frac{b_n}{a_n} \right)^2 = \frac{1}{a_n^2}$$

$$\left(\frac{a_n}{b_n} \right)^2 = \frac{2a_n^2}{a_n^2 - 1} = \frac{2}{1 - 1/a_n^2} \rightarrow 2 \quad (n \rightarrow \infty)$$

$\frac{a_n}{b_n} > 0$ から、 $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \sqrt{2} \quad (n \rightarrow \infty)$ である。□

$$a_{n+1}^2 = 2a_n^2 - 1$$

$$b_{n+1}^2 = 4a_n^2 \left(\frac{a_n^2 - 1}{2} \right)$$

$$\frac{1}{2} (a_{n+1}^2 - 1) = 2a_n^2 (a_n^2 - 1)$$

$$a_{n+1}^2 - 1 = 4a_n^2 (a_n^2 - 1)$$



$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{a_n^2} \right) = \left(\frac{b_n}{a_n} \right)^2$$

第 6 問

$$\triangleright x=0 \rightarrow f(0) - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin y f(y) dy = 1$$

$$x=\pi/2 \rightarrow f(\pi/2) - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos y f(y) dy = \pi/2 + 1$$

$$x=-\pi/2 \rightarrow f(-\pi/2) + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos y f(y) dy = -\pi/2 + 1$$

$$x=-x \rightarrow f(-x) - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{\sin(x+y)}_{\sin x \cos y + \cos x \sin y} f(y) dy = -x + 1$$

$$\text{I')} \quad f(-x) - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos y f'(y) dy - \cos \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin y f'(y) dy = -x + 1$$

$\Rightarrow$ 使えん..

$$-\pi/2 - y$$

$$\sin(\pi/2 + y)$$

第 6 問

[解] $\sin x = S, \cos x = C, \sin y = S', \cos y = C'$ とおく.

題意から.

$$f(x) + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (-S'C' - C'S') f(y) dy = x + 1$$

$$f(x) + S \int_{-\pi/2}^{\pi/2} C' f(y) dy - C \int_{-\pi/2}^{\pi/2} S' f(y) dy = x + 1 \quad \dots *$$

よって.

$$A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} C' f(y) dy, \quad B = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} S' f(y) dy \quad \dots ①$$

よおとから

$$f(x) = x + 1 - A + B \quad \dots ②$$

①に代入して

$$\begin{cases} A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos y (y + 1 - A \sin y + B \cos y) dy \\ B = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin y (y + 1 - A \sin y + B \cos y) dy \end{cases} \quad \dots ③$$

よって偶奇関数の性質から

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} y \cos y dy = 0, \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} y \sin y dy = 2$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos y = 2 \int_0^{\pi/2} \cos y dy = 2, \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin y dy = 0$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin y \cos y dy = 0$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 y dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 y dy = \frac{\pi}{2}$$

よって③に代入して

$$\begin{cases} A = 2 + \frac{\pi}{2} B \\ B = 2 - \frac{\pi}{2} A \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} A = \frac{4\pi + 8}{4 + \pi^2} \\ B = \frac{-4\pi + 8}{4 + \pi^2} \end{cases}$$

②に代入して

$$f(x) = x + 1 - \frac{4\pi + 8}{4 + \pi^2} \sin x + \frac{-4\pi + 8}{4 + \pi^2} \cos x$$

$$[-y \cos y + \sin y]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$-\pi/2$$

$$\sin y$$

$$2 + \frac{\pi}{2} \frac{2(4\pi - 2\pi^2)}{4 + \pi^2} + \frac{8 + 2\pi^2}{4 + \pi^2}$$

$$2 \left[\frac{1}{2} y - \frac{1}{4} \sin 2y \right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$2 - \frac{\pi}{2} \left(2 + \frac{\pi}{2} B \right) = B$$

$$2 - \pi - \frac{\pi^2}{4} B = B$$

$$2 - \pi = B \left(1 + \frac{\pi^2}{4} \right)$$