

第 1 問

[解] $x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2yz - 2x(y+z) - 5 = 0 \quad \dots ①$

$\alpha = y+z, \beta = yz$ とおく。 y, z は t の2次式 $t^2 - \alpha t + \beta = 0$ の

2正実解だから $\alpha^2 - 4\beta \geq 0, \alpha, \beta \geq 0 \dots ②$ である。①を整理して

$\alpha^2 - 2\alpha\alpha + 2\alpha^2 - 2\beta - 5 = 0 \quad \dots ③$

③が α について、正実解を持つから同様に

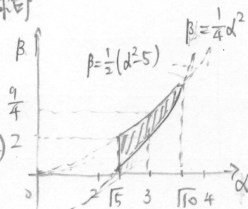
$\beta^2 - (2\alpha^2 - 2\beta - 5) \geq 0 \quad \dots ④$

が必要。②④を図示すると右図斜線部

の中にある格子点は $(3, 2)$ だけ

だから、 $(\alpha, \beta) = (3, 2)$ とき $(y, z) = (2, 1), (1, 2)^2$

が必要 ($y, z \in \mathbb{Z}$ から $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$)



③を代ると

$x^2 - 6x + 9 = 0 \quad \therefore x = 3$

よって $x \in \mathbb{Z}$ で十分。以上より

$(x, y, z) = (3, 2, 1), (3, 1, 2)_{\#}$

$-\frac{1}{2}(z^2 - 2xz + x^2) + 2z^2$

$y^2 + 4yz + z^2 - 5$

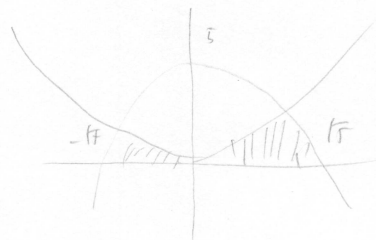
$2(y+z)^2 - 2yz$
 $2(y^2 + z^2 + 2yz)$

$2\alpha^2 + 2\beta - 2\alpha\alpha + \alpha^2 - 5 = 0$

$(x - \alpha)^2 + \alpha^2 + 2\beta - 5 = 0$

$\frac{10}{4} \quad \frac{9}{4}$

$\beta < -\frac{1}{2}(\alpha^2 - 5)$



第 2 問

▷ [またかよーな無限の収束条件]

$$\circ \text{ (初項) } = 0$$

$$\circ |公比| \leq 1 \quad (\alpha^n \text{ の } \alpha \text{ をいいます})$$

第 2 問

[解] $f_1(x) = 1$, $f_{n+1}(x) = (1+x)f_n(x^2)$ -- ①

$$g_n(x) = (1-x)f_n(x)$$

①の両辺に $(1-x)$ をかけてやると

$$\begin{cases} g_{n+1}(x) = g_n(x^2) \\ g_1(x) = 1-x \end{cases}$$

1) $g_n(x) = 1 - x^{2^{n-1}}$ であるから

$$f_n(x) = \frac{x^{2^n} - 1}{x - 1}$$

が収束する条件は $|x| < 1$ である。

$$|x^2| \leq 1 \quad \therefore -1 \leq x \leq 1$$

つまり

$$-1 \leq x < 1$$

($x=1$ のとき $f_{n+1}(1) = 2f_n(1)$ から $f_n(1) = 2^{n-1}$ となり発散)

$$(1-x)(1+x^2)$$

$$(1+x)(1+x^2)$$

$$1+x = (1+x)$$

$$x^2$$

$$\frac{1-x^{2^{n-1}}}{1-x}$$

$$1-x^2 = \frac{1-x^2}{1-x}$$

$$1-x^2$$

$$\frac{1-x^4}{1-x}$$

$$x^{2^{n-1}}$$

$$1-(x^2)^2$$

$$(1-x^{2^{n-1}})(1+x)$$

$$1+x-x^{2^{n-1}}-x^{2^n}$$

$$\frac{1-x^{2^n}}{1-x^2}$$

$$(1+x)$$

$$\frac{1-x^{2^n}}{1-x}$$

$$n = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2^3 & 2^4 & 2^5 \end{matrix}$$

$$0 \quad 1 \quad 3 \quad 7 \quad 15$$

第 問

90 - 31

34

第 3 問

[解] $e(i\theta) = e + is$ ($C = \cos\theta, S = \sin\theta$)

と置く。又、 α^k の表す点を A_k と

おく ($k=0,1,\dots,4$)。又、

直線 A_1A_2 上かつ A_0A_4 上

である。 $\triangle ZA_1A_2 \sim \triangle ZA_3A_4$

である。 $\alpha^2 = -1 + i\sqrt{5}$

ここで、右図から

$$1 - \alpha = \alpha = 1 - \alpha$$

$$\therefore \alpha^2 + \alpha - 1 = 0$$

$\alpha > 0$ から

$$\alpha = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})$$

つまり、 $A_1A_0 = A_2A_4 = 1 - \alpha = \alpha$

$$ZA_1 = A_1A_2 = 1 : (1 + \alpha) - 1 = 1 - \alpha = 1 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ である。}$$

$$Z - \alpha = \frac{2}{-1 + \sqrt{5}} (\alpha - \alpha^2)$$

$$Z = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} (\alpha - \alpha^2) + \alpha$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin 72^\circ = \frac{\alpha}{2} \text{ である。} \\ \alpha = 2 \sin 72^\circ = \alpha + \alpha \text{ である。} \end{array} \right]$$

(2) $1 - \alpha = \frac{1}{\alpha}$ である。 $ZA_0 = A_2A_4$ である。 $\triangle ZA_0A_2$ は 2 等辺三角形

である。 $\therefore$ 外接円の中点は線分 ZA_2 の 2 等分点上にある。

そこでこの中点を O' とおく。

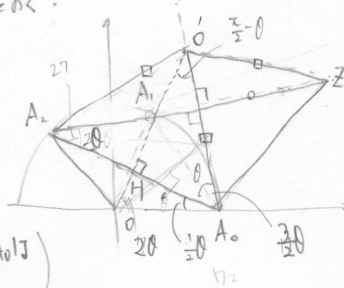
O' から A_2A_0 に下した

垂線と O' から A_2A_0 に

下した線分等しく、 H

とおく。

($\therefore \triangle OA_1A_2, \triangle OA_3A_4$ は
2 等辺三角形)



$36^\circ = \theta$ とおく。円周角の定理から

$$\angle A_1A_2A_0 = \frac{1}{2} \angle A_1OA_0 = \frac{1}{2} 2\theta = \theta$$

したがって、 $\angle A_2A_0O' = \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{3}{2}\theta$ である。

$$\angle O'A_0A_2 = \angle O'A_2A_0 = 2\theta$$

したがって、 $\triangle O'A_0A_2$ は 2 等辺三角形である。 $O'O = O'A_0$ である。

$\triangle ZA_2A_0$ の外接円 Γ を通る。

[別解]

(1) Z を A_0 のまわりに $\frac{2}{5}\pi$ だけ回転し、 A_0 から Z へ $\frac{A_0A_1}{A_0Z}$ 倍した

が A_1 である。

$$\alpha - 1 = (2 \sin \frac{2}{5}\pi) \cdot e(i\frac{2}{5}\pi) \cdot (Z - 1)$$

$$= (\alpha + \alpha^2) \alpha (Z - 1)$$

$$Z - 1 = \frac{\alpha - 1}{\alpha^2 + 1} \therefore Z = \frac{\alpha^2 + \alpha}{\alpha^2 + 1}$$

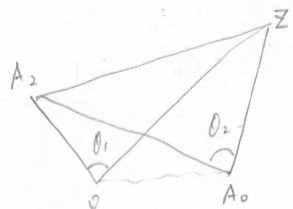
(2) $\angle AOZ = \theta_1$, $\angle AAOZ = \theta_2$ として、 $\theta_1 = \theta_2$ を示す。

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \arg \frac{\alpha^2}{Z} \\ &= \arg \frac{\alpha^2(\alpha^2 + 1)}{\alpha^2 + \alpha} \\ &= \arg \frac{\alpha^2(\alpha + \alpha^2)}{\alpha + 1} \\ &= 2 \arg \alpha + \arg(\alpha + \alpha^2) - \arg(\alpha + 1) \quad \text{--- ①} \end{aligned}$$

$$\theta_2 = \arg \frac{\alpha^2 - 1}{Z - 1} = \arg \alpha + \arg(\alpha + 1) + \arg(\alpha + \alpha^2) \quad \text{--- ②}$$

$$\arg \alpha = \frac{2}{5}\pi, \arg(\alpha + \alpha^2) = 0, \alpha + 1 = 2e^{-\frac{\pi}{5}}e(i\frac{\pi}{5}) \text{ である}$$

$$\arg(\alpha + 1) = \frac{\pi}{5} \text{ である。} \text{ ①② とおいて } \theta_1 = \theta_2 \text{ である。}$$



第 問

第 4 問

[解] (1) $0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$ だから各辺10倍して

$$3.010 < 10 \log_{10} 2 < 3.011$$

5) $n=10$ は $\{n \log_{10} 2\} < 0.02$ を満たす。

(2) 2^n が7けたになる3と、この最高位が7の時。

$$7 \cdot 10^{k-1} \leq 2^n < 8 \cdot 10^{k-1}$$

各辺正対数をとって、以下 $\log_{10} 2 = \log_{10} 2$ とかく。

$$(k-1) + \log_{10} 7 \leq n \log_{10} 2 < 3 + \log_{10} 2 + (k-1)$$

$k-1 \in \mathbb{Z} \geq 0$, $0.8450 < \log_{10} 7 < 0.8451$, $0.9030 < 3 + \log_{10} 2 < 0.9033$ だから、 $0.8451 \leq \{n \log_{10} 2\} < 0.9030$ となる*

を満たすのは良いこと。

$$2.1070 < 7 \log_{10} 2 < 2.1077$$

$$\therefore 0.1070 < \{7 \log_{10} 2\} < 0.1077$$

だから、両辺8倍して。

$$0.8560 < \{56 \log_{10} 2\} < 0.8616$$

6) $n=56$ は * を満たす。したがって、 $n=56$ は解の1つ

[別解.. 言霊に乗車]

以下。

$$0.8060 < \{6 \log_{10} 2\} < 0.8066$$

又(1)から

$$0.040 < \{40 \log_{10} 2\} < 0.044$$

辺10倍して

$$0.8460 < \{46 \log_{10} 2\} < 0.8506$$

よって $n=46$ は 問題 を満たす。

$$0.107 \sim 0.1077$$

$$0.21$$

$$0.21 \sim$$

$$0.02$$

$$301.0 < 10^2 < 301.1$$

$$301.0 < 10^2 < 301.1$$

$$0.90 \sim 0.99$$

$$0.80 \sim$$

$$56$$

$$5616$$

$$0.90 \sim 0.99$$

$$0.86 \sim 0.97$$

$$0.84 \sim 0.96$$

問 第

問 第 第

第 6 問

[関連(?)] ...座標の導出を見て思い出した公式の導出

点距離公式の導出

垂足の座標がいらなかったポイント

$l: ax+by+c=0$, $A(x, y)$ とおく. 垂足 $H(d, \beta)$ とおく.

$\overrightarrow{AH}$ は l の法線 $\overrightarrow{AH} \parallel \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ に平行で l 上にある.

$$\overrightarrow{AH} = k \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

∴ $H(x+ka, y+kb)$ とおけるから

$$\begin{cases} d = x+ka \\ \beta = y+kb \end{cases} \quad \begin{cases} ka = d-x \\ kb = \beta-y \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}$$

① $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ の内積を取る [d, β について4行4列法]

$$k(a^2+b^2) = ad+b\beta - (ax+by)$$

$ax+by+c=0$ から

$$k(a^2+b^2) = -(ax+by+c)$$

だから

$$d = \frac{|k| \sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \textcircled{2}$$

第 6 問

[解] $C_1: x^2 + y^2 = 1, -1 < \alpha < -\frac{1}{2}$ ①

$P(c, s) (c = \cos \theta, s = \sin \theta)$ とおく

$(0 \leq \theta < 2\pi)$ と P の

接線 $cx + sy = 1$

だから $Q(x, y)$ とおく

$$\overrightarrow{RQ} \parallel \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$$

又 $\overrightarrow{RQ}$ は Q と R の間にひくから

$$\overrightarrow{RS} = \frac{|ca+1|}{\sqrt{c^2+s^2}} \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} = |ca+1| \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$$

$$\text{I) } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = |ca+1| \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$$

② $\text{II) } -1 \leq c \leq 1, -1 < \alpha < -\frac{1}{2}$ から $-1 < ca < 1$ より

$|ca+1| = 1-ca$ だから ② $|ca+1|$ を代入

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1-ca) \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore x = c - ac^2 + a, y = s - csa$$

$$\text{I) } \frac{dx}{d\theta} = -s + 2acs = s(2ac-1)$$

$$\frac{dy}{d\theta} = c - a(2c^2-1) = -2ac^2 + c + a$$

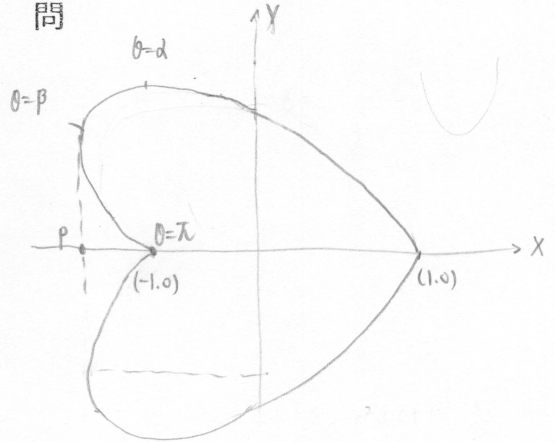
③ ④ から下表を得る (Q の対称性から C_1 は x 軸対称)

θ	0	α	π	2π	$2\pi-\alpha$	2π
$\dot{x}$	-	-	+	+	+	+
$\dot{y}$	+	0	-	-	-	0
(x, y)	(1, 0)	✓	✓	✓	✓	✓

$$\left(0 < \alpha < \beta < 2\pi, c \cdot s \cdot d = \frac{1 - \sqrt{1 + 8a^2}}{4a}, \cos \beta = \frac{1}{2a} \right)$$

$\theta = \beta$ となる x 座標 P とおく

したがって C_2 の x 座標の根は β と $\pi - \beta$ と



したがって C_2 の x 座標は -1 より小さく C_2 の囲む面積のうち $y \geq 0$ の部分 S' とし、求める面積 S は

$$S = 2S' \quad \text{⑤ (対称性)}$$

であり、 π での上側 $y \geq 0$, 下側 $y \leq 0$

$$S' = \int_P^1 y + dx - \int_P^{-1} y - dx$$

$$= \int_P^0 y \frac{dx}{d\theta} d\theta - \int_P^{-1} y - \frac{dx}{d\theta} d\theta$$

$$= - \int_0^\pi y \frac{dx}{d\theta} d\theta$$

$$= - \int_0^\pi (s - csa) s(2ac-1) d\theta$$

$$= - \int_0^\pi \{ s^2(-2ac^2-1) + 3ac \} d\theta$$

$$= - \int_0^\pi \left(-\frac{1}{2}a^2 \sin^2 2\theta - s^2 + 3as^2c \right) d\theta$$

$$= \left[\frac{1}{2}a^2 \left(\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{8}\sin 4\theta \right) + \left(\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta \right) - as^3 \right]_0^\pi$$

$$= \left[\frac{1}{2}a^2 \left(\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi \right) \right] = \frac{1}{2}(a^2+1)\pi$$

⑥ $|ca+1|$

$$S = \frac{1}{2}(a^2+2)\pi$$