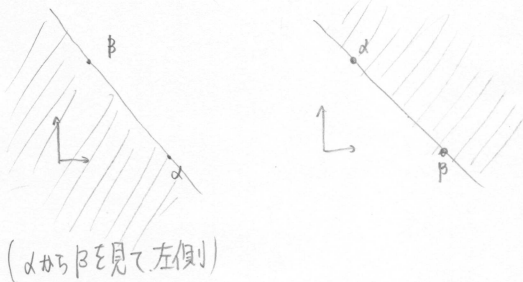


2000, 不規則

第 1 問

[解] (1) $\frac{\beta - z}{\alpha - z} = r(e^{i\theta} + i\sin\theta)$ ($r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$) とおく.

$\sin\theta > 0 \therefore 0 < \theta < \pi$ だから、下図斜線部(境界含む)



(2) 対称性から、 $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲で考えて、 $0 \leq \arg \alpha \leq \arg \beta \leq \arg r < 2\pi$ として良い(回転云々による).
与式から

$$\begin{cases} 1 + \frac{z-r}{z-\alpha} + \frac{z-r}{z-\beta} = 0 \\ 1 + \frac{z-\alpha}{z-r} + \frac{z-\alpha}{z-\beta} = 0 \\ 1 + \frac{z-\beta}{z-r} + \frac{z-\beta}{z-\alpha} = 0 \end{cases}$$

$$A = \frac{z-\beta}{z-\alpha}, \quad \beta = \frac{z-r}{z-\beta}, \quad C = \frac{z-\alpha}{z-r} \text{ とする.}$$

$$A = r_1 e^{i\theta_1}, \quad \beta = r_2 e^{i\theta_2}, \quad C = r_3 e^{i\theta_3} \text{ とする}$$

$$(r_k > 0 (k=1,2,3), e^{i\theta} = C + iS, C = \cos\theta, S = \sin\theta)$$

★から

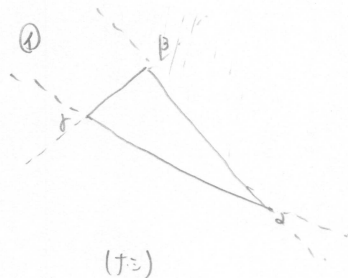
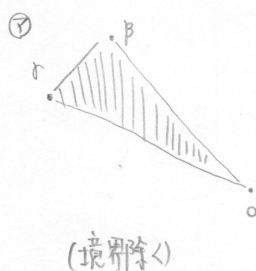
$$\begin{cases} 1 + \frac{1}{r_3} e^{i\theta_3} + r_2 e^{i\theta_2} = 0 \\ 1 + \frac{1}{r_1} e^{i\theta_1} + r_3 e^{i\theta_3} = 0 \\ 1 + \frac{1}{r_2} e^{i\theta_2} + r_1 e^{i\theta_1} = 0 \end{cases}$$

虚部を比較して

$$\begin{cases} \frac{1}{r_3} \sin\theta_3 = r_2 \sin\theta_2 \\ \frac{1}{r_1} \sin\theta_1 = r_3 \sin\theta_3 \\ \frac{1}{r_2} \sin\theta_2 = r_1 \sin\theta_1 \end{cases}$$

$r_k > 0$ から、 $\sin\theta_1, \sin\theta_2, \sin\theta_3$ の正負は等しい。($\theta_k \neq 0$)

(1) から、⑦ $\sin\theta_1 > 0$ の時 と ④ $\sin\theta_1 < 0$ の時の z の存在領域は下図



従って、題意は示された

[別(2)]

$$\begin{cases} 1 + \frac{z-r}{z-\alpha} + \frac{z-r}{z-\beta} = 0 \quad \dots ① \\ \frac{z-\alpha}{z-r} + 1 + \frac{z-\alpha}{z-\beta} = 0 \quad \dots ② \end{cases}$$

① から $\frac{z-r}{z-\alpha}, \frac{z-r}{z-\beta}$ の虚部は共に 0 か、互いに異符号。0 の時は $\alpha \sim \beta$ が

同一直線上にある矛盾。そこで、 $\text{Im}\left(\frac{z-r}{z-\alpha}\right) > 0, \text{Im}\left(\frac{z-r}{z-\beta}\right) < 0$ とする。

虚数 A とその逆数 $\frac{1}{A}$ では虚部の符号が異なる。 $\text{Im}\left(\frac{z-\alpha}{z-r}\right) > 0$ 。

したがって②から $\text{Im}\left(\frac{z-\beta}{z-\alpha}\right) > 0$ となる。以上から、

$$\frac{z-\alpha}{z-r}, \frac{z-\alpha}{z-\beta}, \frac{z-\beta}{z-\alpha} \text{ の虚部は同符号}$$

となる。(以下略)

第 2 問

[解] (1) $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 - 1$ とおく. $f'(x) = e^x - x > e^x - (x+1) \geq 0$

から, $f'(x) > 0$ だから, $f(x)$ は単調増加, したがって, $0 \leq x$ のとき,

$$f(x) \geq f(0) = 0 \quad \square$$

(2) $\left(\frac{f_n(x)}{n^2}\right)' = e^{-nx} (1 - n(x-1)) = e^{-nx} (-nx + (n+1))$ から,

下表を得る

x	0		$\frac{n+1}{n}$	
f'_n		+		-
f_n		/		\

したがって, $M_n = f_n\left(\frac{n+1}{n}\right) = n^2 \cdot \frac{1}{n} e^{-(n+1)} = n e^{-(n+1)}$ となる.

$$S = \sum_{k=1}^n M_k \leq 2$$

$$\begin{cases} S = e^{-1} + 2 \cdot e^{-2} + \dots + n e^{-(n+1)} \\ \frac{1}{e} S = e^{-2} + \dots + (n-1) e^{-(n+1)} + n e^{-(n+2)} \end{cases}$$

辺引いて

$$\begin{aligned} (1 - \frac{1}{e}) S &= \sum_{k=2}^{n+1} e^{-k} - n e^{-(n+2)} \\ &= e^{-2} \frac{1 - (1/e)^n}{1 - 1/e} - n e^{-(n+2)} \end{aligned}$$

$$S = \frac{e}{e-1} \left[\frac{1 - (1/e)^n}{e(e-1)} - n e^{-(n+2)} \right]$$

$$\longrightarrow \frac{1}{(e-1)^2} \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$e^{-n}$$

$$\frac{e-1}{e}$$

$$\frac{e-1}{e} \cdot e^2 \cdot \frac{e-1}{e}$$

第 3 問

▷ 整数方程式

① 強引に因数分解

$\Rightarrow l \in \mathbb{Z}$ として解を求めて存在条件.

第 3 問

[解] (1) $(-ak, k)$

(2) L 上 $x, y > 0$ の部分に格子点 (α, β) があるを仮定する。

と、 $\alpha \geq 2$ から

$$\frac{\alpha}{\alpha^2+1} + \frac{\beta}{a} = 1$$

$$\therefore \beta = a \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha^2+1} \right) \in \mathbb{Z}$$

より、 $\frac{\alpha}{\alpha^2+1} \in \mathbb{Z}$ である。 a, α^2+1 は互いに素だから、 α が α^2+1 で

割り切れるから、 $0 < \alpha < \alpha^2+1$ より、これはありえない。おて矛盾し、

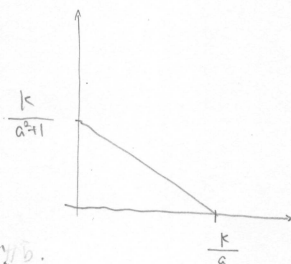
L 上 $x, y > 0$ には格子点はない。四

$$(3) L = \frac{x}{k/a} + \frac{y}{k/(a^2+1)} = 1 \text{ である。 } \alpha \in \mathbb{Z} \ (0 < \alpha < \frac{k}{a})$$

と、 (α, β) を L 上の点とすると

$$\beta = \frac{k}{a^2+1} \left(1 - \frac{\alpha}{k/a} \right)$$

$$= \frac{k}{a^2+1} - \frac{\alpha d}{a^2+1}$$



ここで、 a と a^2+1 は互いに素である。

$a, 2a, \dots, a^2 a \in a^2+1$ でわったあとの集合は $1, 2, \dots, a^2$ であるから、 k/a^2+1 でわったあとのとして、 $\alpha d \in a^2+1$ でわったあとのがある。ある α がある。 ($k > a(a^2+1)$ から $\alpha = 1, 2, \dots, a^2+1, \dots, \lfloor \frac{k}{a} \rfloor$) したがってこの時、

$$\beta \in \mathbb{Z}, \beta > 0 \quad (\because k > a(a^2+1))$$

となるから、 (α, β) は L 上 $x, y > 0$ である格子点である。

おて示された四

$$[解] L: a(x + (a^2+1)y) = k \quad \text{①}$$

$$(2) \text{ ①} \Leftrightarrow a(x - a^2y) + (a^2+1)y = 0 \quad \text{②}$$

a^2, a^2+1 は互いに素で、②を満たす $x, y \in \mathbb{N}$ がある存在する。 y は a の倍数で、 $y = a\ell$ なる $\ell \in \mathbb{N}$ がある ($\because a, y \in \mathbb{N}$)、この時②から

$$x = (1-\ell)(a^2+1)$$

$a^2+1 \in \mathbb{N}$ 、 $1-\ell \leq 0$ から $x \in \mathbb{N}$ に反する。

$$(3) \text{ ①の時、 } a(x+ak) + (a^2+1)(y-k) = 0 \quad \text{③}$$

ここで、 a, a^2+1 は互いに素だから $\ell \in \mathbb{Z}$ として

$$\begin{cases} x+ak = \ell(a^2+1) \\ y-k = -\ell a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \ell(a^2+1) - ak \\ y = -\ell a + k \end{cases} \quad \text{④}$$

とおく。この (x, y) は L 上の格子点、 $x > 0, y > 0$ なら

$$\frac{ak}{a^2+1} < \ell < \frac{k}{a} \quad \text{⑤}$$

となるから、 $k > a(a^2+1)$ のとき

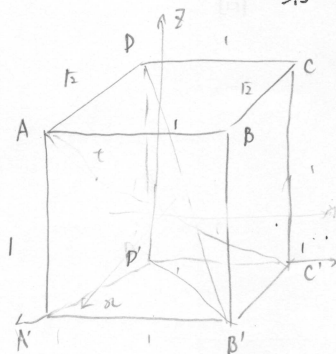
$$\frac{k}{a} - \frac{ak}{a^2+1} = \frac{k}{a(a^2+1)} > 1$$

より、⑤を満たす $\ell \in \mathbb{Z}$ は存在する。

問 第

第 4 問

[解]



座標空間で考える。 $A'(\frac{1}{2}, 0, 0)$ $B'(1, 1, 0)$ $C'(0, 1, 0)$

$A(\frac{1}{2}, 0, 1)$ とおく。

(1) P が AC の中点、つまり $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ の時、切り口平面 $\pi(p)$ は
法線ベクトル $\vec{AC} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる。

$$\pi(p) : \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}) - (y - \frac{1}{2}) + (z - \frac{1}{2}) = 0$$

$$\therefore \pi(p) : \frac{1}{2}x - y + z - 1 = 0$$

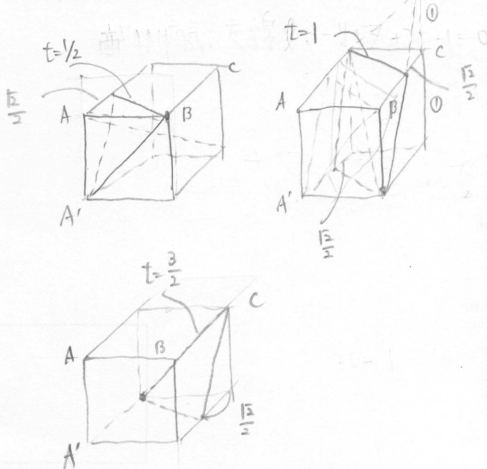
$\therefore$ から、 $B'(1, 1, 0)$ 、 $D(0, 0, 1)$ はたしかにこの上の点である。

(2) $AP = t$ とおくと $P(\frac{1}{2} - \frac{t}{2}, \frac{t}{2}, \frac{t}{2})$ であるから、

$$\pi(p) : \frac{1}{2}(x + \frac{t}{2} - \frac{1}{2}) - (y - \frac{t}{2}) + (z - 1 + \frac{t}{2}) = 0$$

$$\therefore \pi(p) : \frac{1}{2}x - y + z + 2t - 3 = 0$$

である。(1)と同様に各頂点を $\pi(p)$ が通る時、以下のようになる。



1° $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ の時

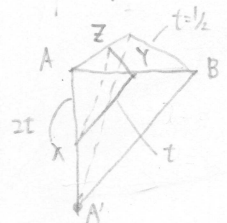
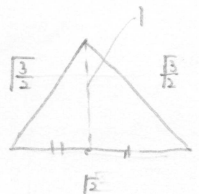
$\pi(p)$ は $\triangle AA'$ 、 AB 、 AD と各々点 X 、 Y 、 Z で交わる。

$$S(t) = (\triangle XYZ)$$

である。 $S(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ と右図より

切り口が相似比 1 から

$$S(t) = (2t)^2 \cdot S(\frac{1}{2}) = 2\sqrt{2}t^2$$



2° $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ の時

対称性から、1° の t を $2-t$ とおきかえて

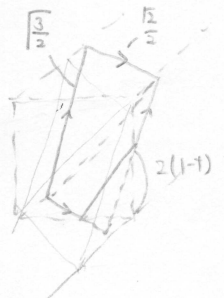
$$S(t) = 2\sqrt{2}(2-t)^2$$

3° $1 \leq t \leq \frac{3}{2}$ の時

切り口は右図の逆三角形になる

($t = \frac{1}{2}$) 1° と同じ相似比から

$$S(t) = 2 \cdot S(\frac{1}{2}) - \{2(1-t)\}^2 \cdot S(\frac{1}{2}) = \sqrt{2} \{1 - 2(1-t)^2\}$$



4° $\frac{3}{2} \leq t \leq 2$ の時

3° の t を $2-t$ とおきかえて、

$$S(t) = \sqrt{2} \{1 - 2(1-t)^2\}$$

以上をまとめて、 t を x とおきかえて

$$S(x) = \begin{cases} 2\sqrt{2}x^2 & (0 \leq x \leq \frac{1}{2}) \\ \sqrt{2} \{1 - 2(1-x)^2\} & (\frac{1}{2} \leq x \leq 1) \\ \sqrt{2} \{1 - 2(x-1)^2\} & (1 \leq x \leq \frac{3}{2}) \\ 2\sqrt{2}(2-x)^2 & (\frac{3}{2} \leq x \leq 2) \end{cases}$$

問 第

第 5 問

【解】 $d = re(i\theta)$ ($r \in \mathbb{R}, \theta \in \mathbb{C}, C = \cos \theta, S = \sin \theta$) とおける。
 $(0 \leq \theta < 2\pi)$

$$(1) a_n = r^n e(n\theta) + \frac{1}{r^n} e(-n\theta) \\ = r^n (c_n \cos n\theta + i s_n \sin n\theta) + \frac{1}{r^n} (c_n \cos n\theta - i s_n \sin n\theta)$$

から

$$|a_n|^2 = \left(r^n + \frac{1}{r^n}\right)^2 c_n^2 \cos^2 n\theta + \left(r^n - \frac{1}{r^n}\right)^2 s_n^2 \sin^2 n\theta \\ = \left(r^{2n} + \frac{1}{r^{2n}} + 2\right) c_n^2 \cos^2 n\theta + \left(r^{2n} + \frac{1}{r^{2n}} - 2\right) s_n^2 \sin^2 n\theta \\ = r^{2n} + \frac{1}{r^{2n}} + 2(c_n^2 \cos^2 n\theta - s_n^2 \sin^2 n\theta) \\ = r^{2n} + \frac{1}{r^{2n}} + 2c_n \cdot 2n\theta$$

$n \rightarrow \infty$ のとき $|a_n|^2 < 4$ の成立が必要だが、 $r \neq 1$ のとき $|a_n|^2 \rightarrow \infty$ となる

から $r = 1$ のとき $|a| = 1$ である

(2) (1) から $a_n = 2c_n \cdot n\theta$ であるから $|2c_n \cdot n\theta| > 1$ なる $n \in \mathbb{N}$

があることを示せばよい。2 乗して得る。

$$|c_n \cdot \theta| > \frac{1}{2} \text{ のとき } a_1 = 2|c_1 \cdot \theta| > 1$$

$$|c_n \cdot \theta| < \frac{1}{2} \text{ のとき } a_2 = 2|c_2 \cdot \theta| = 2|2c_1^2 \cdot \theta - 1| > 1$$

$$|c_n \cdot \theta| = \frac{1}{2} \text{ のとき } a_3 = 2|4c_1^3 \cdot \theta - 3c_1 \cdot \theta| = 2 > 1$$

以上で全ての場合はつくずれ、おて示された

$$2n\theta = 2\pi k + 2d$$

$$-\frac{1}{3}\pi + 2\pi k < 2d < \frac{2}{3}\pi + 2\pi k$$

$$2a_n \theta > 1$$

$$2(c_n \cdot 2n\theta) > 1$$

$$c_n \cdot 2n\theta$$

2.

$$2c_n \cdot n\theta - 1$$

$$c_n \cdot 2n\theta$$

$$2(1 + c_n \cdot 2n\theta) > 1$$

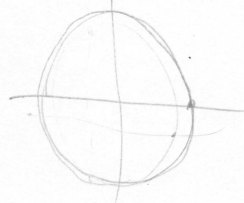
$$c_n \cdot 2n\theta > \frac{1}{2}$$

$$a_n =$$

$$4c_n^2 \cdot n\theta > 1$$

$$|c_n \cdot \theta| > \frac{1}{2} \quad (c_n \cdot 2n\theta = 2 - 2n\theta - 1)$$

$$|c_n \cdot \theta| > \frac{1}{4} \quad 2a_n \cdot 2n\theta + 2 > 1$$



$$m(\theta - \frac{k}{n}\pi)$$

$$\frac{1}{3}\pi < m(\theta - \frac{k}{n}\pi) < \frac{2}{3}\pi \quad |2c_n \cdot n\theta| > 1$$

$$2d$$

第 問

第 6 問

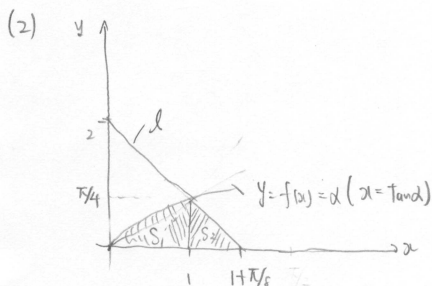
[解] $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$

$t = \tan \theta$ ($-\pi/2 < \theta < \pi/2$) とおき, $\tan \alpha = x$ ($-\pi/2 < \alpha < \pi/2$) とおくと

$$f(x) = \int_0^{\alpha} \cos^2 \theta \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \alpha$$

(1) $x=1$ のとき $\alpha = \pi/4$ の時, 法線 l は, $f'(1) = \frac{1}{2}$ から

$$l: y = -2(x-1) + \pi/4 = -2x + 2 + \pi/4$$



$f'(x) > 0$ から, グラフの概形は上図. 題意の面積 S のうち,

$0 \leq x \leq 1$ のものを S_1 , $1 \leq x \leq 1 + \pi/8$ のものを S_2 とおく.

$$S = S_1 + S_2 \quad \dots \textcircled{1}$$

さて,

$$\begin{aligned} S_1 &= \square - \triangle \\ &= \pi/4 - \int_0^{\pi/4} x dy \\ &= \pi/4 - \int_0^{\pi/4} \tan \alpha d\alpha \\ &= \pi/4 - [-\log |\cos \alpha|]_0^{\pi/4} \\ &= \pi/4 + \log \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot \pi/8 \cdot \pi/4 = \frac{\pi^2}{64}$$

だから $\textcircled{1}$ より

$$S = \frac{\pi^2}{64} + \frac{\pi}{4} + \log \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan \theta = x$$

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$x = \tan \theta$$

$$x = \frac{2 + \pi/4}{2}$$

$$1 + \frac{\pi}{8}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\int_0^1 x dx$$

$$\int_0^{\pi/4} x \frac{dy}{d\alpha} d\alpha$$

$$\frac{x}{\cos^2 \alpha} d\alpha$$

$$\int x dy$$

$$\int x \frac{dy}{d\alpha} d\alpha$$

$$\tan \theta$$