第　　問

/20

第　問

/20

第 2 問

[解]

[補題 I] $f_n(x)$ は x の2次関数かつ偶関数である

帰納法で示す。$n=1$ の時は明らか。$n \leq k \in \mathbb{N}$ での成立を仮定すると、

$f_i(x) = a_i x^2 + b_i$ とおける。$(i=1,2,\cdots,k)$、$(a_i \neq 0)$。漸化式から、

$$f_{k+1}(x) = 3x^2\int_0^1 2a_i t^2 dt + 3\int_0^1 (a_i t^2 + b_i)dt$$

$$= 2a_i x^2 + a_i + 3b_i$$

$a_i \neq 0$ から、たしかに $n=k+1$ でも [補題] の主張は成立。よって示された。

[補題] から $a_n (\neq 0)$、$b_n \in \mathbb{R}$ として、

$$\begin{cases} f_n(x) = a_n x^2 + b_n \\ a_{n+1} = 2a_n,\ b_{n+1} = a_n + 3b_n,\ a_1 = 4,\ b_1 = 1 \end{cases}$$

とおける。まず、等比数列の公式から、

$$a_n = 2^{n+1} \quad \cdots ①$$

b_n の式に代入し、$c_n = \frac{b_n}{2^n}$ とおいて、セイリすると、

$$c_{n+1} = \frac{3}{2}c_n + 1$$

$$c_{n+1} + 2 = \frac{3}{2}(c_n + 2)$$

等比数列の公式から

$$c_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2}+2\right) - 2$$

$$\therefore\ b_n = 5\cdot 3^{n-1} - 2^{n+1} \quad \cdots ②$$

①.②から

$$f_n(x) = 2^{n+1}x^2 + 5\cdot 3^{n-1} - 2^{n+1}$$

//

3

2^n

$2\cdot 3^{n-1} - 2^{n-1}$

$6-2$

2^{n+1}

$4\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)$

$* f_2(x) = 3x^2\int_0^1 8t^2 dt + 3\int_0^1 (4t^2+1)dt = 8x^2+7$

/20

第 3 問

▷ 3点 A_k は通るので、あとは円であれば良い

⇒ "x^2, y^2の項が係数一致" ∧ xyの項がナシ

ならばOK.

$$u(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)$$
$$+v(a_2x+b_2y+c_2)(a_3x+b_3y+c_3)$$
$$+(a_3x+b_3y+c_3)(a_1x+b_1y+c_1)=0$$

より、

$$\begin{cases} x^2 \cdots a_1a_2u + a_2a_3v + a_1a_3 \\ y^2 \cdots b_1b_2u + b_2b_3v + b_1b_3 \\ xy \cdots u(a_1b_2+a_2b_1)+v(a_2b_3+a_3b_2)+(a_3b_1+a_1b_3)=0 \end{cases}$$

（x^2 と y^2 の2行 … ①、xy の行 … ②）

▷ あと、f_kにも "平行でない" ∧ "1点で交わることはない" の条件が

あるので、

$$\begin{cases} a_1b_2-a_2b_1 \neq 0 \\ a_2b_3-a_3b_2 \neq 0 \\ a_3b_1-a_1b_3 \neq 0 \end{cases} \wedge \quad f_1(x,y)=f_2(x,y)=f_3(x,y)=0 \text{ なる } (x,y) \text{ はない}$$

▷ さて本題。①、②は u, vの連立方程式で

$$\begin{cases} Xu+Yv+A=0 \\ Zu+Wv+B=0 \end{cases}$$

の形 … これが解を持てばOK！その条件は

$$\begin{cases} ㋐\ XW-YZ \neq 0 \\ ㋑\ \begin{pmatrix} X \\ Y \\ A \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} Z \\ W \\ B \end{pmatrix} \text{ なる } k \text{ がある} \end{cases}$$

のいずれかだが、

$$XW=(a_1a_2-b_1b_2)(a_2b_3+a_3b_2)$$
$$YZ=(a_2a_3-b_2b_3)(a_1b_2+a_2b_1)$$

から、

$$XW-YZ=\underbrace{(a_2^2+b_2^2)}_{\neq 0}\underbrace{(a_1b_3-a_3b_1)}_{\neq 0}$$

▷ あとは変な場合（恒等的に0、直線）を除いておわり

［2元連立方程式の解］

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases}$$

（A_1, B_1 は同時に0ではない）
（A_2, B_2　〃　）

が解を持つ条件は

$$\begin{cases} A_1B_2-A_2B_1 \neq 0 \\ \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \end{pmatrix} \text{ なる } k \text{ がある} \end{cases}$$

/20

京後 98 ③

第 3 問

[解] $F(x,y) = u f_1(x,y) f_2(x,y) + v f_2(x,y) f_3(x,y) + f_3(x,y) f_1(x,y)$

とおく。又、A_kの座標を$A_k(x_k, y_k)$ $(k=1,2,3)$とおく。

$l_1: f_1(x,y)=0$ 上に A_2, A_3, $l_2: f_2(x,y)=0$ 上に A_1, A_3, $l_3: f_3(x,y)=0$ 上に A_1, A_2 があることから、$F(x,y)=0$ は 3点 A_k $(k=1,2,3)$ を通る。…①

次に、$F(x,y)$ は高々2次式で、これが円を表すのは、

「x^2, y^2の係数が等しく、xyの係数が0」 …②

の時。したがって、

$$\begin{cases} \underbrace{(a_1a_2-b_1b_2)}_{X}u + \underbrace{(a_2a_3-b_2b_3)}_{Y}v + a_3a_1-b_3b_1=0 \\ \underbrace{(a_1b_2+a_2b_1)}_{Z}u + \underbrace{(a_2b_3+a_3b_2)}_{W}v + a_3b_1+a_1b_3=0 \end{cases} \quad \cdots *$$

をみたす(u,v)の存在が必要。ここで、

$$\Delta = XW - YZ$$

とおく。

$$\Delta = (a_2^2+b_2^2)(a_1b_3-a_3b_1) \quad \cdots ③$$

であり、a_2, b_2は同時には0でないから

$$a_2^2+b_2^2 \neq 0 \quad \cdots ④$$

又、$f_1(x,y) \nparallel f_3(x,y)$だから

$$a_1b_3-a_3b_1 \neq 0 \quad \cdots ⑤$$

③④⑤から$\Delta \neq 0$となり、*をみたす(u,v)がただ1つ(u_0,v_0)と定まる。

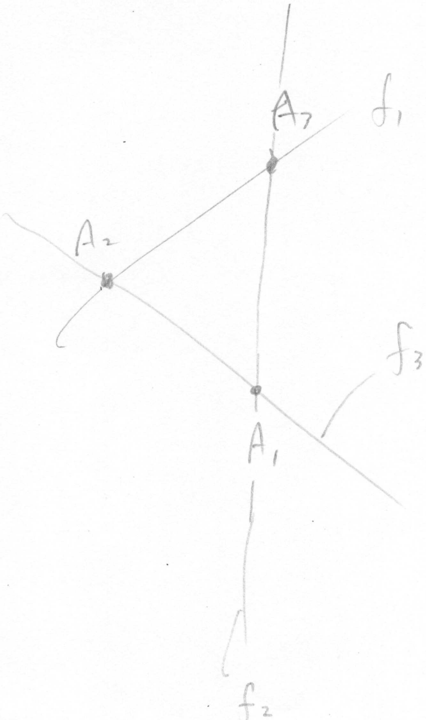
この解に対し$F(x,y)$の2次係数が全て0で、$F(x,y)=0$が1次方程式だとすると、A_k $(k=1,2,3)$が同一直線上にあることになり矛盾。

又、直線A_3A_1上のA_1, A_3と異なる点(x_0,y_0)に対し

$$F(x_0,y_0) = f_3(x_0,y_0) f_1(x_0,y_0) \neq 0$$

となり、$F(x,y)$は恒等的には0でない。

以上から、$(u,v)=(u_0,v_0)$とすると②が成り立ち$F(x,y)=0$は円を表す。∎



/20

$sc' + cs' - xs = 0$　　$x = c' + s'\frac{c}{s}$

第4問

[解] $f(x) = \sin(x+a) - x\sin x$ とおく。又、題意から

$x_n = n\pi + \alpha_n$ ($0<\alpha_n<\pi$) とおける。題意から $f(x_n)=0$

なので

$$\sin(n\pi+\alpha_n+a) - (n\pi+\alpha_n)\sin(n\pi+\alpha_n) = 0$$

nの偶奇にかかわらず

$$\sin(\alpha_n+a) - (n\pi+\alpha_n)\sin\alpha_n = 0 \quad \cdots ①$$

(1) α_nのおき方から、α_nの極限をもとめれば良い。①から

$$\sin\alpha_n = \frac{\sin(\alpha_n+a)}{n\pi+\alpha_n} \longrightarrow 0 \ (n\to\infty) \ (\because 0<\alpha_n<\pi)$$

だから、$\sin x$の連続性とα_nの値域から

$$\alpha_n \longrightarrow 0, \pi \quad (n\to\infty)$$

ただし、$\alpha_n\to\pi$の時、$0<a<\pi$から明らかに$f(a)<0$

となり不適だから、

$$\alpha_n \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty)$$
//

(2) (1)と同様に、$n\alpha_n$の極限を求めれば良い。①を変形して

$$(n\alpha_n\pi + \alpha_n^2)\frac{\sin\alpha_n}{\alpha_n} = \sin(\alpha_n+a)$$

$$n\alpha_n = \left(\frac{\sin(\alpha_n+a)}{\frac{\sin\alpha_n}{\alpha_n}} - \alpha_n^2\right)/\pi$$

(1)から$n\to\infty$の時$\alpha_n\to 0$だから

$$n\alpha_n \longrightarrow \frac{\sin a}{\pi} \quad (n\to\infty)$$
//

$f'(x) = \cos(x+a) - \sin x - x\cos x$

$cs' -$　$cc' - ss' - s - xc$

$c(c' - ts' - t - x)$

$$\alpha_n = \frac{\sin(\alpha_n+a)}{\sin\alpha_n} - n\pi$$

$\alpha_n \sim c \sim \alpha_n + a$

$\sin(\alpha_n+a) - \sin\alpha_n = \cos c$

$x = \frac{\sin(x+a)}{\sin x}$　　$\frac{sc'+s'c}{s}$

$x = \boxed{c' + s'\frac{1}{t}}$

$0 \sim \pi$

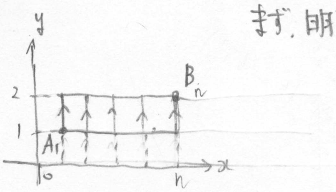
/20

第　問

/20

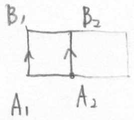
第 5 問

[解]



まず、明らかに $Q_1=1$ である。

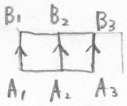
(1) $n=2$の時.



$A_1\to A_2\to B_2$, 又は $A_1\to B_1\to B_2$と行ければ良いから、排反を考えて、

$$Q_2 = 1-(1-p)^2 = p(2-p) \text{ //}$$

$n=3$の時



A_1から右方向へ出発し、どこではじめて上方向へ移動しなければならないか
(A_kA_{k+1}がXとなっている $\min k\in\mathbb{N}$)で
場合分けする。

㋐ A_1A_2がXの時 … $A_1\to B_1$と行くコースで 確率 $p^2(1-p)$

㋑ A_2A_3がXの時 … B_2B_3が矢印になっていれば良く $p^2(1-p)$

㋒ A_1A_2, A_2A_3共O … 確率 p^2

以上から

$$Q_3 = 2p^2(1-p)+p^2 = p^2(3-2p) \text{ //}$$

(2) (1)の$n=3$の時と同様の場合分けをする。つまり、A_1から右へ進んでいって、はじめて行き止まり(X)になっている所がA_kA_{k+1}の時を考える。
($k=1,2,\cdots,n-1$) (以下 $n\geq 4$とする)

この時 B_nまで行ける確率 $a_n(k)$とおくと、A_1~A_k, B_k~B_nが矢印になっており、A_kA_{k+1}がXになっている時で ($k\leq n-1$)

$$a_n(k) = p^{n-1}\cdot(1-p)$$

$k=n$の時

$$a_n(n-1) = p^{n-1}$$

従って

$$Q_n = \sum_{k=1}^{n} a_n(k)$$
$$= (n-1)\,p^{n-1}(1-p)+p^{n-1}$$
$$= p^{n-1}\{n-(n-1)p\}$$

これは$n=2,3$でも成立するから

$$Q_n = p^{n-1}\{n-(n-1)p\} \text{ //}$$

/20

第 6 問

$1-2s^2$

$(2c-6cs^2+4s-6s^3)$

$2c(c^2-s^2)+2s(c^2+1-s^2)$

c^2

$c^2\,2(c+s)+2sc^2-2cs^2$

$s^3(1-2s^2)^2\left[3(1-2s^2)+2\right]$

$s^3(1-2s^2)^2(5-6s^2)$

$3\cos^3 2\theta \sin^3\theta$

$+2\cos^2 2\theta \sin^3\theta$

別解

$(1-s^2)\quad 2(c^3+s^3+2sc^2-2s^2c)$

$c^2(c+2s)+s^2(s-2c)$

/20

$-2\sin2t\cos t$ $-\sin t\cos2t$

第 6 問

[解] $\sin\theta=S$, $\cos\theta=C$ と書く。$I_n=\int_0^{\pi/4}(C^2-S^2)^n\cdot S^3d\theta$ である.

(1) $I_2=\int_0^{\pi/4}\{(C^2+S^2)^2-4S^2C^2\}S^3d\theta$

$=\int_0^{\pi/4}S\{(1-C^2)-4(1-C^2)^2C^2\}d\theta$

$=\left[-C+\frac13C^3+4\left(\frac17C^7-\frac25C^5+\frac13C^3\right)\right]_0^{\pi/4}$

$=\left\{-\frac{\sqrt2}{2}+\frac13\frac12\frac{\sqrt2}{2}+4\left(\frac17\frac18\frac{\sqrt2}{2}-\frac25\frac14\frac{\sqrt2}{2}+\frac13\frac12\frac{\sqrt2}{2}\right)\right\}$

$-\left(-1+\frac13+\frac47-\frac85+\frac43\right)$

$=-\frac{\sqrt2}{2}\left(1-\frac16-\frac1{14}+\frac25-\frac23\right)-\frac{-38}{3\cdot5\cdot7}$

$=-\frac{\sqrt2}{2}\frac{\cancel{104}\ 26}{2\cdot3\cdot5\cdot7}+\frac{38}{3\cdot5\cdot7}$

$=\frac{1}{105}(38-26\sqrt2)$ //

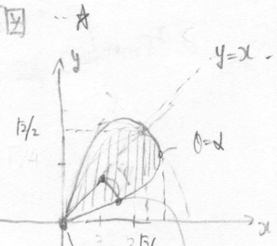
(2) $P(x,y)$ は $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\sin2\theta\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}x(\theta)\\y(\theta)\end{pmatrix}$ と表せる.

$x'(\theta)=2C(1-3S^2)$, $y'(\theta)=2S(2-3S^2)$

から下表を得る(α,β は $\sin\alpha=\sqrt{\frac13}$, $\sin\beta=\sqrt{\frac23}$ をみたす)

θ	0		α		β		$\pi/2$
x'		+	0	−	−	−	
y'		+	+	+	0	−	
(x,y)		↗		↖		↙	

従って,Pのキセキの概形は右図 …☆



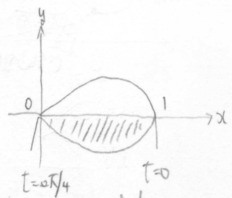
ここで,この図形を負方向に $\pi/4$ 回転させた図形の x,y 座標を $X(\theta),Y(\theta)$ とおくと

$\begin{cases}X(\theta)=\sin2\theta\cos(\theta-\pi/4)\\Y(\theta)=\sin2\theta\sin(\theta-\pi/4)\end{cases}$

$t=\theta-\pi/4$ とおきかえ,$X(\theta)\to X(t)$, $Y(\theta)\to Y(t)$ とすると,

$X(t)=\cos2t\cos t$
$Y(t)=\cos2t\sin t$ $\quad(-\pi/4\le t\le\pi/4)$

$X(t),Y(t)$ は $t=0$ を中心に対称だから,$Y(t)\le0$ をみたす部分のみを考えて,体積は



$V=\int_0^1\pi y^2dx$

$=\int_{-\pi/4}^0\pi Y(t)^2\cdot\frac{dx}{dt}dt$

$=\int_{-\pi/4}^0\pi(\cos2t)^2\sin^2t(-4\sin t\cos^2t-\sin t\cos2t)dt$

$=\int_0^{\pi/4}\pi(\cos2t)^2\sin^2t(\sin t(1-2\sin^2t)+4\sin t(1-\sin^2t))dt$

$=\int_0^{\pi/4}\pi(\cos2t)^2\sin^3t(5-6\sin^2t)dt$ …①

一方,題意の値 V' は

$V'=\pi\int_0^{\pi/4}(\cos2t)^2\sin^3t(5-6\sin^2t)dt$ …②

①,②から $V=V'=\pi3I_3+\pi2I_2$ 図

/20