

第 1 問

$$[\text{解}] \begin{cases} C_{p,q}: y = a(x-p)^2 + q & (a \neq 1) \\ C_1: y = x^2 \end{cases}$$

$C_{p,q}$ と C_1 が 2 交点 で交わることを、1 つの交点 が (p, q) であること

よって $(p, q \in \mathbb{R})$

$$\begin{cases} q = p^2 & \dots ① \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-1)x^2 - 2apx + ap^2 + q = 0 & \dots ② \end{cases}$$

① を ② に代入

$$\begin{cases} (a-1)x^2 - 2apx + (a+1)p^2 = 0 & \dots ②' \end{cases}$$

$$\begin{cases} p > 0 & \dots ③ \end{cases}$$

②' の 2 解 は $x = p, \frac{a+1}{a-1}p$ である。後者の接線が直交することから、

$$2a \left(\frac{a+1}{a-1}p - p \right) \cdot 2 \frac{a+1}{a-1}p = -1$$

$$4a \frac{2(a+1)}{(a-1)^2} p^2 = -1$$

明らかに $a=0, a=-1$ は不適である。

$$p^2 = \frac{-(a-1)^2}{8a(a+1)} \quad \dots ④$$

③ を満たす p が あることは ④ を満たす a の値域を定めれば良い。

$$\frac{-(a-1)^2}{8a(a+1)} > 0$$

$a \neq 1$ から

$$a(a+1) < 0$$

$$-1 < a < 0$$

よって $a \neq 0, -1$ を満たす。

$$2a(x-p)$$

第 2 問

【解】(1) $n=1$ の時は明らかだから $n \geq 2$ とする。

(1) $a_k > 0$ から、 S_j は単調増加数列で、全て異なる値をとる。

これと、 $S_1 \geq 1$ であることから、 $n^2 \leq S_n$ である...①

もし $S_n = k^2$, $k < n$ を満たす $k \in \mathbb{N}$ があるとすると、異なる n の数
 S_j ($j=1, 2, \dots, k$) の k の値のいずれか ($k < n$) をとる
 (ことになる)。この中には等しい S があることになる。矛盾

よって、 $S_n \geq (n+1)^2$ と仮定する。 S_{n-1} も平方数だから、 $S_{n-1} = k^2$,

$S_{n-1} = l^2$ ($k, l \in \mathbb{N}$, $l < k$, $k \geq n+1$) とおける。

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (k+l)(k-l)$$

ここで、 $k-l > 0$, $k+l > k \geq n+1$ ($\because l \in \mathbb{N}$) だから

$$a_n > n+1$$

となり(1)に矛盾。従って、 $S_n \leq n^2$ である...②

以上①②から $S_n = n^2$ である。□

(2) (1)のギロニから、 $S_j = j^2$ ($j=1, 2, \dots, n$) である。したがって、 $n \geq 2$ のとき、

$$a_j = j^2 - (j-1)^2 = 2j-1 \quad (j \geq 2)$$

$$a_1 = 1$$

だから $a_j = 2j-1$ ($j=1$ でも成立)。 $n=1$ の時、 $a_1=1$ で、

これは成り立つ。

$$a_k = 2k-1 \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

$$S_{n-1} + a_n = S_n$$

$$S_j \leq S_j$$

$$(n+1)^2$$

k^2

$$e^{-\frac{1}{2}}$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} \cdot x^{-2}$$

$$e(2\theta) + e(-2\theta)$$

$$2^n = \int_0^n$$

$$e^{2\theta} + e^{-2\theta}$$

$$e(-n\theta) + e(n\theta)$$

$$e^{n\theta} + e^{-n\theta}$$

$$2n^2 \quad (2n-1)^2$$

問 第

第 3 問

[解] 点 X の位置ベクトル (0 支点) を $\vec{x}$ と表す.

(1) 与式から

$$\vec{a} + \vec{b} = -(\vec{c} + \vec{d})$$

2 乗して $|\vec{k}| = 1$ ($k = a, b, c, d$) から

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{c} \quad \dots ①$$

たから

$$|\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{c} + |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2 - 2\vec{c} \cdot \vec{d} + |\vec{d}|^2$$

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{c} - \vec{d}|^2$$

各辺 0 以上だから

$$|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{c} - \vec{d}| \quad (\because |\vec{x}| \geq 0)$$

たして

$$|\vec{AB}| = |\vec{CD}| \quad \square$$

(2) $\vec{b}' = -\vec{b}$, $\vec{d}' = -\vec{d}$ とある.

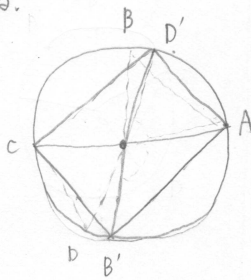
① と同様にして.

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b}' \cdot \vec{d}' = \vec{b} \cdot \vec{d}$$

たから.

$$|\vec{a}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$= |\vec{b}|^2 + |\vec{d}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{d}$$



(1) と同様にして.

$$|\vec{AC}| = |\vec{B'D'}| \quad \dots ②$$

又, AC と B'D' の交点の位置ベクトルは $t, s \in \mathbb{R}$ として

$$t\vec{a} + (1-t)\vec{c} = -s\vec{b} - (1-s)\vec{d} = \vec{p}$$

と表せる. $t = s = 1/2$ はこの等式を満たす (与式). 2 直線の

交点, はただ 1 つだから.

$$\vec{p} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}) = \frac{1}{2}(\vec{b}' + \vec{d}')$$

したがって.

$$|\vec{PA}|^2 = \left| \frac{\vec{a} + \vec{c}}{2} \right|^2 = \left| \frac{-(\vec{b}' + \vec{d}')}{2} \right|^2 = |\vec{PE}|^2$$

$$|\vec{x}| \geq 0 \text{ から } |\vec{PA}| = |\vec{PE}|, \quad |\vec{A}| < |\vec{PB}| = |\vec{PD}| \quad \dots ③$$

②, ③ と, A, B', C, D' が互いに異なる点であることから,

$\square AB'CD'$ は長方形 (対角線がその中点で交わり, 長さも等しい) $\square$

$$(\vec{d}' - \vec{a}) \cdot (\vec{b}' - \vec{a}) = 0$$

$$\vec{b}' \cdot \vec{d}' - \vec{a} \cdot (\vec{b}' + \vec{d}') + |\vec{a}|^2 = 0$$

$$bd + ad + cd + 1 = 0$$

$$CA = B'D'$$

$$C^2 - 2ac +$$

$$t\vec{a} + (1-t)\vec{c} = -s\vec{b} - (1-s)\vec{d}$$

第 4 問

▷ 3変数 cyclic 方程式

⇒ 対称性を意識し、"1周回3"の方針でとまらなく

① 差, 積などの評価

② 自明解因数分解

③ 四角足す, かた

④ 3文字ならワンチャン文字消去

第 4 問

[解1]

$$(1) \begin{cases} b = 2a^2 - 1 & \dots ① \\ c = 2b^2 - 1 & \dots ② \\ a = 2c^2 - 1 & \dots ③ \end{cases}$$

対称性から、 $|a| > 1$ ならば $|b|, |c| > 1$ である。そこで $|a|, |b|, |c| > 1$ と仮定する。①②③の両辺から1を引いたものを加算して④

$$(a-1)(b-1)(c-1) = 8(a-1)(b-1)(c-1)(a+1)(b+1)(c+1)$$

仮定から $(a-1)(b-1)(c-1) \neq 0$ だから

$$1 = 8(a+1)(b+1)(c+1) \geq 8 \cdot 2^3 a^2 b^2 c^2 > 64 \quad (\because \text{仮定})$$

となり矛盾。したがって、 $|a| \leq 1, |b| \leq 1, |c| \leq 1$ ④

(2) (1) から、 $a = \cos \alpha$ とおける。 $(0 \leq \alpha < 2\pi)$ 。①③より..

$$b = \cos 2\alpha, \quad c = \cos 4\alpha, \quad \cos \alpha = a, \quad \delta \alpha \quad \dots ④$$

④から、

$$\cos \alpha \delta \alpha - a \cdot \delta \alpha = 0$$

$$-2 \sin \frac{\alpha}{2} \delta \sin \frac{\alpha}{2} \delta \alpha = 0.$$

$0 \leq \alpha < 2\pi$ より、

$$\alpha = \frac{4}{9} n \pi \quad (n=0, 1, 2, 3, 4)$$

$$\frac{4}{9} k \pi \quad (k=0, 1, 2, 3)$$

$n=0, k=0$ の時は α は等しくなるが、その他の時は異なるので、したがって

$n=0 \wedge 4, k=1 \sim 3$ の 8 組の解がある ④

[別-3]

$$a-1 = 2c^2 - 2 = 2(c+1)(c-1)$$

$$= 2(c+1)2(b+1)(b-1)$$

$$= 8(c+1)(b+1)(a+1)(a-1)$$

となり、 $a-1$ (≠0) で割れば矛盾がわかる

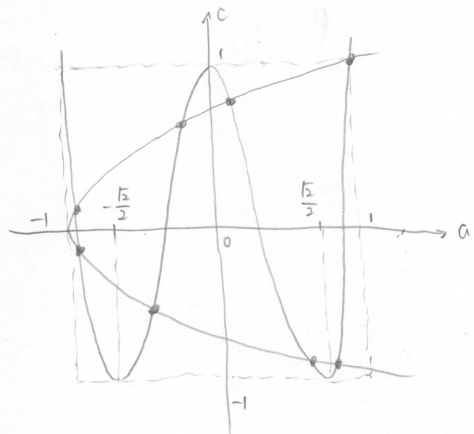
[別-4] (3変数で、1字消去がワザ)

①②から b を消去

$$c = 2(2a^2 - 1)^2 - 1 \quad \dots ④$$

この右辺 $f(a)$ として、 $f(a)$ は a の4次関数で、 ac 平面上で

$(0, 1), (\pm 1, 1), (\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, -1)$ を通るので、グラフは以下



③④から c を消すと、 a の8次方程式となるから解は上の8通り ④

又、 $|a| \leq 1, |c| \leq 1$ から、①②より $|b| \leq 1$ ④

[別-1] (1) $|a| > 1$ ならば、 $b, c, a > 1$ である。以下、小仮定する。

$$b-a = 2a^2 - a - 1 = (a-1)(2a+1) > 0 \quad \therefore b > a$$

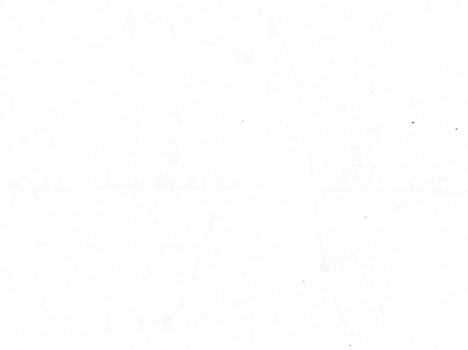
同様にして $a > c > b > a$ となり、矛盾

[別-2] (1) ①+②+③から

$$a+b+c = 2(a^2+b^2+c^2) - 3 > 2(a+b+c) - 3 \quad (\because \text{仮定})$$

$$\therefore a+b+c < 3 \Rightarrow \text{矛盾}$$

第 5 問



[解] 初期状態で青のカード a 枚, 赤のカード b 枚, 黄のカード 1 枚であるとする。このとき、 k 回目に青のカードをとり出す確率は A_k とする。 A_{k+1} について、 $k+1$ 回目にとり出すカードが k 回目に加えられたものか否かで場合分けして、

$$A_{k+1} = \frac{1}{a+b+k} A_k + \frac{a+b+k-1}{a+b+k} A_k = A_k$$

↑
 $k+1$ 回目に引くカードが k 回目に加えられたものであるとき、それが青である確率は A_k

↑
 $k+1$ 回目に引くカードが k 回目に加えられていないとき、それは $a+b+k-1$ 枚から青のカード a 枚を引く確率 A_k

たからくり直しを用いて、

$$A_k = A_1 = \frac{a}{a+b}$$

たまた、 $(a, b) = (3, 3)$ とし、 $A_k = \frac{1}{2}$ である。

そこで、以下の様に示す確率変数 X_k を定める。

$$X_k = \begin{cases} 1 & (k \text{ 回目に青のカードがとられるとき}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

すると、

$$E(n) = 3 + E(X)$$

$$= 3 + E(X_1 + \dots + X_n)$$

$$= 3 + \sum_{k=1}^n E(X_k) \quad (\text{期待値の加法定理})$$

$$= 3 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} = \frac{1}{2}n + 3$$

第 6 問

[解] $C = \cos t$, $S = \sin t$ とする。

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = e^{-t}(-S-C) < 0 \\ \frac{dy}{dt} = e^{-t}(C-S) \end{cases} \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。

(1) 曲線は連続かつ、 t にあて x が単調に減少するので、

$$\begin{aligned} L &= \left| \int_0^{\pi/2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \right| \\ &= \left| \int_0^{\pi/2} e^{-t} \sqrt{(S+C)^2 + (C-S)^2} dt \right| \\ &= \left| \int_0^{\pi/2} e^{-t} dt \right| = -\left[e^{-t} \right]_0^{\pi/2} = 1 - e^{-\pi/2} \end{aligned}$$

(2) ①から、 $\frac{dy}{dt}$ は $0 \leq t \leq \pi/4$ で $\frac{dy}{dt} \geq 0$, $\pi/4 \leq t \leq \pi/2$ で $\frac{dy}{dt} \leq 0$ となる。 $t=0$ (1.0), $t=\pi/2$ (0.0) である。したがって、この間の概形は右図で、求める面積 T

$$S^2 + C^2$$

と、

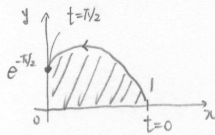
$$T = \int_0^1 y dx$$

$$= \int_{\pi/2}^0 y \frac{dx}{dt} dt$$

$$= \int_{\pi/2}^0 e^{-t} S \cdot e^{-t}(-S-C) dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} e^{-2t} \left(\frac{1-\cos 2t + \sin 2t}{2} \right) dt$$

$$= \int_0^{\pi} e^{-p} (1-C+S) \frac{1}{4} dp \quad (p=2t, \frac{dp}{dt}=2) \quad \cdots \textcircled{2}$$



$$\frac{S^2 + C^2}{T}$$

$$\frac{1-\cos 2\theta}{2} \quad \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

各項計算して、

$$\circ \int_0^{\pi} e^{-p} dp = 1 - e^{-\pi}$$

$$\circ \int_0^{\pi} C e^{-p} dp = \frac{1}{2} \left[e^{-p} (-\cos p + \sin p) \right]_0^{\pi} = \frac{1}{2} (e^{-\pi} + 1)$$

$$\circ \int_0^{\pi} S e^{-p} dp = \frac{1}{2} \left[e^{-p} (-\sin p - \cos p) \right]_0^{\pi} = \frac{1}{2} (e^{-\pi} + 1)$$

したがって、②に代入して、

$$T = \frac{1}{4} (1 - e^{-\pi})$$

$$e^{-p}(-C+S+S)$$