[解] (1) $C=\cos\theta$, $S=\sin\theta$とする。まず$f_n(x)$について証明する。$f_1(x)=x$, $f_2(x)=2x^2-1$から、$n=1,2$では成立するので、以下$n=k, k+1$ $(k\in\mathbb{N})$での成立を仮定する。

$$\cos(k+2)\theta = 2\cos(k+1)\theta\cos\theta - \cos k\theta$$
$$= 2f_{k+1}(C)\cdot C - f_k(C)$$

だから、$f_{k+2}(x) = 2xf_{k+1}(x) - f_k(x)$ …①とすれば良く、$n=k+2$でも成立するので、示された。■

次に$g_n(x)$について。$g_1(x)=1$, $g_2(x)=2x$より、$n=1,2$の時は成立するので、以下$n=k, k+1$での成立を仮定する。

$$\sin(k+2)\theta = 2\sin(k+1)\theta\cdot C - \sin k\theta$$
$$= \{2g_{k+1}(x)\cdot C - g_k(x)\}S$$

より、

$$g_{k+2}(x) = 2xg_{k+1}(x) - g_k(x) \quad \cdots ②$$

とすれば良く、$n=k+2$でも成立するので、示された。■

(2) $f_n(C)=\cos n\theta$の両辺をθで微分して、

$$f_n'(C)\cdot(-S) = -n\sin n\theta = -n\,g_n(C)\cdot S$$

よって$x=C$とすると

$$f_n'(x) = n\cdot g_n(x) \quad \cdots ③$$

が$-1<x<1$をみたす任意のxで成立する。f, gは多項式だから、従って③が恒等式である。

よって示された。■

(3) $p\in$ prime 及び $f_p(0)=f_p(\cos\frac{\pi}{2})=\cos\frac{p\pi}{2}=0$ ($\because p\in$ odd) から、定数項が0なので、

"$f_p(x)$の$p-1$次以下の係数が全てpで割り切れる"

$\Leftrightarrow$ "$f_p'(x)$の$p-2$次以下の係数が全てpで割り切れる" …④

となる。(2)から、

④$\Leftrightarrow$ "$p\cdot g_p(x)$ 〃 " …⑤

となり、(1)の漸化式及び初期条件から、$g_p(x)$の係数は全てセイスウだから、⑤は成立。

以上から示された。■

$2c^2-1$

$\cos(k+2)\theta + \cos k\theta =$

$\sin(k+2)\theta + \sin k\theta = 2\sin(k+1)\theta\cos\theta - \sin k\theta$

$= 2g_{k+1}\cdot cs - g_k\cdot s$

$2(k+1)g_{k+1} + 2xg_k$

〃

$2f_{k+1} + 2x\cdot f_{k+1}' - f_k'$

$= (k+2)[2g_{k+1} + 2xg_{k+1}' - g_k']$

$2f_{k+1} + 2x\cdot(k+1)\cdot g_{k+1} - kg_k$

〃 $k[g_{k+2} - 2xg_{k+1}]$

$(k+2)g_{k+2}$

$2f_{k+1} + g_{k+1}(2xk + 2x - 2x) + kg_{k+2}$

$2kx\cdot g_{k+1} + kg_{k+2}$

$2f_{k+1} + 2kxg_{k+1} = 2g_{k+2}$

a

第 2 問

[解] $A=m^n+1,\ B=n^m+1$ とおく $(m,n\in\mathbb{N},\ m<n)$

$n, m\in$ even の時. mod 2 で考えると $A, B\equiv 1$ となり. この時 A も B も 10 の倍数にならず不適だから. $n, m\in$ odd で. $n=2\alpha-1,\ m=2\beta-1$ $(\alpha, \beta\in\mathbb{N},\ \alpha>\beta)$ とおける

$$A = m^n+1 = (m+1)(m^{n-1}-m^{n-2}+\cdots+1)$$
$$B = n^m+1 = (n+1)(n^{m-1}-n^{m-2}+\cdots+1)$$

これが共に 10 の倍数であるものの 1 つに. $m+1, n+1$ が共に 10 の倍数であるような組がある. $m<n$ から. $m=9\ \ n=19$ とでもすれば良い. //

[解2] $(m,n)=(9,19)$ は $m,n\in\mathbb{N},\ m<n$ をみたす. 以下 mod 10 で考える

$$m^n+1\equiv(-1)^{19}+1\equiv 0$$
$$n^m+1\equiv(-1)^{9}+1\equiv 0$$

から. この時 m^n+1, n^m+1 のいずれも 10 でわり切れるから. $(m,n)=(9,19)$ // はもとめる組の 1 つ

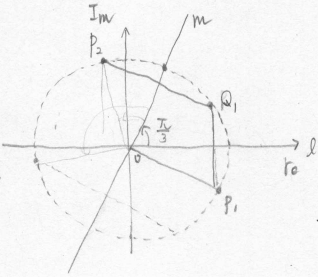
/20

第　　問

/20

京大後 96 [3]

第 3 問



[解] 対称性から. P_1がl, mの交点、Oを原点とする半径1の円上にあるとして良い。以下複素平面で考え, lが実軸と一致し, mがlを$\frac{\pi}{3}$回転したものになるようにする。P_k, Q_kを表す複素数p_k, q_kとする。($k=1.2.3.4$) 題意から.

$$\begin{cases} q_k = \overline{p_k} \\ p_{k+1} = e\left(\frac{2}{3}\pi\right)\overline{q_k} \end{cases} \quad \cdots①$$

である。ただし, $e(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$ とする。①から

$$p_{k+1} = e\left(\tfrac{2}{3}\pi\right)\cdot p_k \quad \cdots②$$

だから. くり返し用いて.

$$p_4 = \left\{e\left(\tfrac{2}{3}\pi\right)\right\}^3 \cdot p_1 = p_1 \qquad \therefore P_1 = P_4 \text{ 同 (1)}$$

($p=0$の時の成立は明らか)

(2) p_k, q_kの偏角を. α_k, β_k ($0 \le \alpha_k, \beta_k < 2\pi$) とおく。②の両辺argをとって.

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k + \tfrac{2}{3}\pi \quad \cdots③$$

だから.

$$|P_kQ_k| = 2|\sin\alpha_k|$$

$$|P_{k+1}Q_k| = 2\left|\sin\left(\alpha_{k+1} - \tfrac{\pi}{3}\right)\right| = 2\left|\sin\left(\alpha_k + \tfrac{\pi}{3}\right)\right|$$

となり. 題意の長さLは

$$L = \sum_{k=1}^{3}\left\{|P_kQ_k| + |Q_kP_{k+1}|\right\}$$

$$= 2\sum_{k=1}^{3}|\sin\alpha_k| + 2\sum_{k=1}^{3}\left|\sin\left(\alpha_k + \tfrac{\pi}{3}\right)\right|$$

$$= 2\sum_{k=0}^{5}\left|\sin\left(\alpha_1 + \tfrac{k}{3}\pi\right)\right| \quad \cdots④$$

とα_1を用いて表せる。ここで$a_k = \sin\left(\alpha_1 + \frac{k}{3}\pi\right)$とおく。

$0 \le \alpha_1 \le \frac{\pi}{3}$の場合をしらべれば. $\frac{i}{3}\pi \le \alpha_1 \le \frac{i+1}{3}\pi$ ($i=2,3,4,5$) の時には, $\alpha_1' = \alpha_1 - \frac{i}{3}\pi$ とすれば④の式から$0 \le \alpha_1' \le \frac{\pi}{3}$の場合に帰着するので, この場合を調べれば十分。この時.

$$a_0 \ge 0,\ a_1 \ge 0,\ a_2 \ge 0.$$

で. $a_4 = \sin(\alpha_1 + \pi) = -a_1$, $a_5 = -a_2$, $a_6 = -a_3$ だから④に代入して

$$L = 4(a_1 + a_2 + a_3)$$

$$= 4\left\{2\sin\left(\alpha_1 + \tfrac{\pi}{3}\right)\cos\tfrac{\pi}{3} + \sin\left(\alpha_1 + \tfrac{\pi}{3}\right)\right\}$$

$$= 8\sin\left(\alpha_1 + \tfrac{\pi}{3}\right) \le 8 \quad (\text{等号成立は } \alpha_1 = \tfrac{\pi}{6})$$

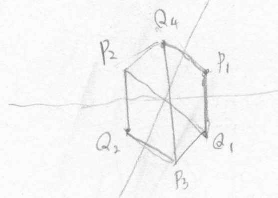
だから. $\max L = 8$ // (この時. 正六角形で. たしかに合致)

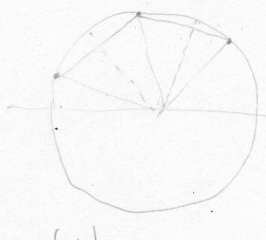
$\theta_1 +$

$\frac{\alpha}{m_1}$

$$\frac{\alpha}{q_1} = \frac{p_2}{\alpha}$$

$$\alpha^2 = q_1 p_2$$





$\sin(\alpha_1 +$

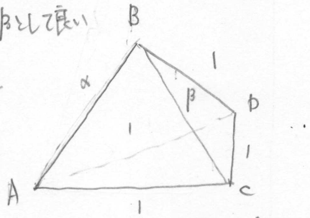
$\sin\alpha_1 + \left\{\sin\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\alpha_1 + \frac{2}{3}\pi\right)\right.$

$= 2\sin\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{1}{3}\pi$

第 4 問

[解] $x+y>0,\ x-y>0$ …① 四辺体の4頂点 ABCDとして

$AB=\sqrt{x+y}=\alpha,\ BC=\sqrt{x-y}=\beta$ として良い



このような四面体の存在条件を考える。△ACDは α, β によらず存在するので、Bの存在条件を考えれば良い。そこで、Dを原点、DAをx軸正方向とし $C\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ となるような座標で考えると Bの存在条件は

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 & \cdots ② \\ (x-1)^2+y^2+z^2=\alpha^2 & \cdots ③ \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+z^2=\beta^2 & \cdots ④ \end{cases}$$

をみたす $(x, y, z)\in\mathbb{R}$ の存在条件に等しい。$(z\neq 0)$ ②を③④に代入し

$$\begin{cases} -2x+2=\alpha^2 \\ -x-\sqrt{3}y+2=\beta^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2}(2-\alpha^2) \\ y=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(1+\frac{1}{2}\alpha^2-\beta^2\right) \end{cases}$$

①に代入して

$$z^2=1-\frac{1}{4}(2-\alpha^2)^2-\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}\alpha^2-\beta^2\right)^2 \quad ⑤$$

このような $x, y, z\in\mathbb{R}$ の存在条件は⑤の右辺が0より大なることで $(\because z\neq 0)$

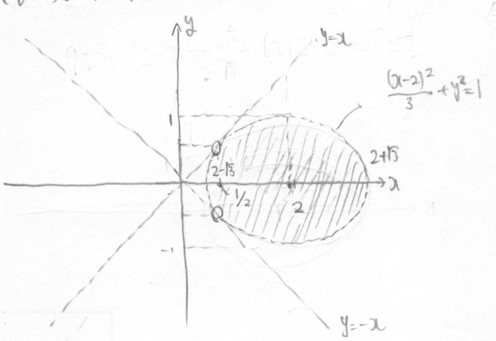
$$1-\frac{1}{4}(2-\alpha^2)^2-\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}(-x+3y)\right)^2>0$$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{1}{4}\left(2-(x+y)\right)^2-\frac{1}{12}(2-x+3y)^2>0$$

$$\Leftrightarrow x^2-4x+3y^2+1<0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{3}+y^2<1 \quad \cdots ⑥$$

よってもとめる領域は ①∧⑥で、図示して下図斜線部(境界は含まず)



[本日のミス]
- $z\neq 0$.
- 存在条件…
- うつしまちがえて labyrinth に入った

/20

第 5 問

▷円の鉄則「中心からのキョリによる場合分け」はやはり最強
今回は回転体だから、キョリ一定な時、その場合のうちの1つを代表としてとりあげておけば他はどうでも良い（ただ、対称性の話でないかナリだから、とりあえず座標は出した上でこうした）

▷

/20

第5問

[解] 辺PQと原点のキョリをrとおくと

右下図から $0\leq r\leq\sqrt{1-a^2}$ …① である。

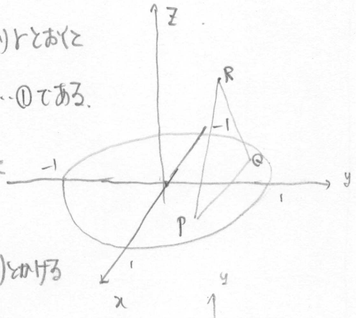
この時、PQの中点Mとすると

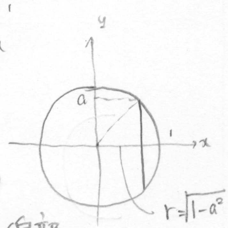
$C=\cos\theta,\ S=\sin\theta$ として

$M(rC, rS)$ $(0\leq\theta<2\pi)$ とかける

から、$R(X,Y,Z)$ とすると

$X=rC,\ Y=rS,\ Z=\sqrt{3}a$ ($\because Z>0$)



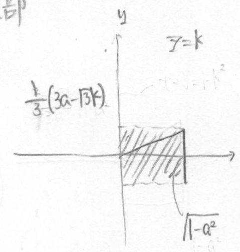


で表せる。従ってr, θをうごかして V の(1)

$Z=k$ $(0\leq k\leq\sqrt{3}a)$ での切り口は右図斜線部

をZ軸まわりに回転したそれに等しく、

この面積 $S(k)$ として



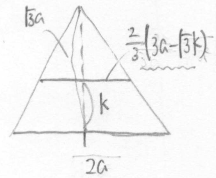
$$S(k)=\pi\left((1-a^2)+\frac{1}{3}(\sqrt{3}a-k)^2\right)$$

だから

$$V=\int_0^{\sqrt{3}a}S(k)\,dk$$

$$=\pi\left[(1-a^2)k+\frac{1}{9}(k-\sqrt{3}a)^3\right]_0^{\sqrt{3}a}$$

$$=\pi\left[\sqrt{3}a(1-a^2)+\frac{\sqrt{3}}{3}a^3\right]$$ //



(2) $\frac{dV}{da}\frac{1}{\pi}=\sqrt{3}(1-2a^2)$ から下表を得る

a	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
V'		+	0	−	
V		↗		↘	

従ってVは $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ の時 max $\frac{1}{3}\sqrt{6}\pi$ をとる。 //

[本時のミス]

・(1)で → $a=1$の代入で気付く。

/20

第6問

▷ $n=2$からに拡張できる から.それで考えると楽

/20

第 6 問

[解] (1) p_{n+2} について. 1回目に出たコインで場合分けする

1回目に表で. 出発点をとびこす… p_{n+1}
〃 裏 〃 … p_n

だから $p_{n+2}=\frac{1}{2}(p_{n+1}+p_n)$. 又. $p_3=\frac{3}{8}$, $p_4=\frac{5}{16}$ だから漸化式をといて

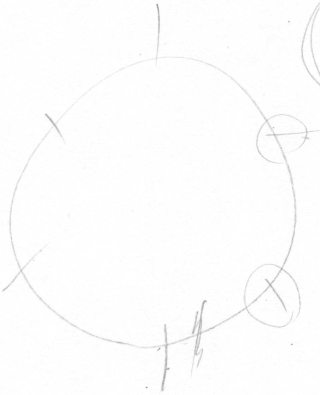
$$p_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$ //

(2) k−1周目までとびこす時. まず1周目をとびこす確率は p_n, 2周目以降とびこす確率は, とびこした後の点が1周目の出発点より1っだけ進んだ点であることから p_{n-1} である. 又. k周目に出発点を踏む確率は排反を考えて $(1-p_{n-1})$ である. 以上から

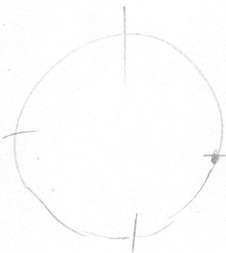
$$q_{n,k}=p_n\cdot(p_{n-1})^{k-2}\cdot(1-p_{n-1})$$
$$=\frac{1}{3}(1-\alpha^n)\left\{\frac{1}{3}(1-\alpha^{n-1})\right\}^{k-2}\cdot\left(\frac{2}{3}+\alpha^{n-1}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}(1-\alpha^n)(1-\alpha^{n-1})^{k-2}\cdot\left(\frac{2}{3}+\alpha^{n-1}\right)\quad(\alpha=1/2)$$
$$\longrightarrow 2\left(\frac{1}{3}\right)^k\quad(n\to\infty)$$ //

$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$

$\frac{1}{4}$



$\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}$



$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$

$\frac{1}{8}+\frac{1}{4}$

$\frac{3}{8}$

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)$

$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)+$ $\frac{3}{8}$

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\right)$

$\frac{9}{24}$ $\frac{1}{24}$ $\frac{5}{8}$

$\frac{1}{3}-\frac{1}{45}$ $\frac{15}{45}=$

/20