

第 1 問

[解] x^n を x^2+ax+b で割った商を S_n とおく。

$$\begin{aligned} x^{n+1} &= x^n(x^2+ax+b) + r_n x^2 + S_n x \\ &= (x^n p_n(x) + r_n)(x^2+ax+b) + (S_n - ar_n)x - r_n b \end{aligned}$$

だから漸化式

$$\begin{cases} r_{n+1} = S_n - ar_n \\ S_{n+1} = -br_n \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}$$

を得る。 $r_1=1, S_1=0$... ②に注意する。①から、

$$r_{n+2} = -br_{n+1} - ar_n$$

だから、②から $r_2 = -a$ であることと $a \neq 0$ (1) から、

$$r_n = \frac{a^n}{a-p} - \frac{p^n}{d-p}$$

である。(1) に代入して

$$\frac{a^n - p^n}{a-p} < \frac{a^{n+1} - p^{n+1}}{a-p}$$

が任意の自然数 n で成立する。(1) から $0 < p < a$... ③だから、両辺 $a-p(x)$ をかけて

$p^n(x)$ をめて整理すると

$$p-1 < \left(\frac{p}{a}\right)^n (a-1) \quad \dots *$$

だから、問題は示すに同

(2) *が任意の自然数で成立するのは以下の時 (1) ③に注意した) 又、(1) ④にて

* $\rightarrow$ (1) ④も成立する。

$\beta \backslash \alpha$	$0 < \alpha < 1$	$\alpha = 1$	$1 < \alpha$
$0 < \beta < 1$	x	o	o
$\beta = 1$	/	/	o
$1 < \beta$	/	/	o

$\left(\begin{array}{l} \alpha \dots \text{成立} \\ \lambda \dots \text{不成立} \end{array} \right)$

したがって、*が任意の自然数で成立する α, β の条件は、 $0 < \beta < \alpha$ のもとで

$$\alpha \geq 1$$

である。したがって、 f とある (a, b) の必要十分条件は

x の2次方程式 $x^2+ax+b=0$ が2つの正実根をもち、かつ
大きい方の根が1以上であること。

である。この左辺 $f(a)$, 判別式 D とする。

1° 2解を1以上の時

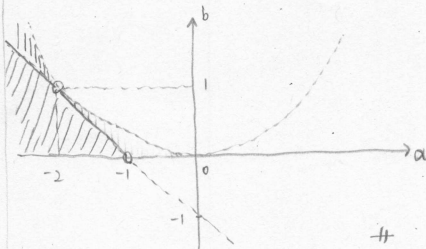
$$\begin{cases} D > 0 \\ 1 \leq -\frac{a}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 4b > 0 \\ a \leq -2 \end{cases}$$

$$f(1) \geq 0 \quad 1+a+b \geq 0$$

2° $1 > \alpha > 0 > \alpha \leq 1$, $1 > \beta > 0 > \alpha \leq 1$ の時

$$\begin{cases} f(1) \leq 0 \\ f(1) > 0 \\ D > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Ha+b \leq 0 \\ a^2 - 4b > 0 \\ b > 0 \end{cases}$$

以上まとめて、下図斜線部 (境界は $b = -a-1$ の場合、○は含む)



$$x =$$

$$) x =$$

$$7 < -$$

$$0 < \beta < \alpha$$



$$2 \leq -a$$

$$a \leq -2$$

第 2 問

【解】 $\angle B_n O C_n = \beta_n$, $\angle C_n O A_n = \gamma_n$

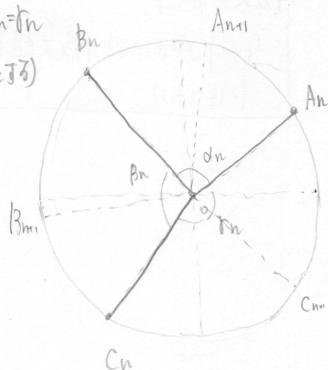
とおく (題意の d_n と同様の表しをする)

と

$$d_n + \beta_n + \gamma_n = 2\pi \dots \textcircled{1}$$

である. 又, 漸化式は以下.

$$\begin{cases} d_{n+1} = \frac{1}{2} (d_n + \beta_n) \\ \beta_{n+1} = \frac{1}{2} (\beta_n + \gamma_n) \dots \textcircled{2} \\ \gamma_{n+1} = \frac{1}{2} (d_n + \gamma_n) \end{cases}$$



(1), (2) ①, ②から

$$4d_{n+1} = 2(d_n + \beta_n) = 2d_n + (\beta_n + \gamma_n) \quad (\because \textcircled{2})$$

$$= 2d_n + 2\pi - d_{n-1} \quad (\because \textcircled{1})$$

$$d_{n+2} = \frac{1}{2} (2\pi - \gamma_{n+1})$$

$$= \pi - \frac{1}{4} (2\pi - \beta_n)$$

$$= \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{8} (2\pi - d_{n-1})$$

$$= \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{8} d_{n-1} \quad \text{回}$$

(3) (2) の漸化式から

$$d_{3(n+1)} = -\frac{1}{8} d_{3n} + \frac{3}{4}\pi$$

$$d_{3(n+1)} - \frac{3}{8}\pi = -\frac{1}{8} (d_{3n} - \frac{3}{8}\pi)$$

等比数列の公式から

$$d_{3n} = \left(-\frac{1}{8}\right)^n \left(d_0 - \frac{3}{8}\pi\right) + \frac{3}{8}\pi$$

$$4d_{n+1} = 2d_n - d_{n-1} + 2\pi$$

$$2\beta_n = -d_{n-1} + 2\pi$$

$$2(2\pi -$$

$$+ \frac{1}{4} \frac{1}{2} (2\pi -$$

$$d = -\frac{1}{8}d + \frac{3}{4}\pi$$

$$\frac{9}{8}d = \frac{3}{4}\pi$$

$$\frac{9}{8} \times \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{12} + \frac{2}{3}$$

$$\frac{9}{12}$$

第 問

[参考例題]

$f(x) = |x^2 + ax + b|$ の最大値 M が $M \geq \frac{1}{2}$ となるとき
($-1 \leq x \leq 1$)

必ずしも考えつきのことは

- 必要条件から絞る
- 値域の幅, 補助関数

$\Rightarrow$ いずれも $x = \pm 1, 0$ の必要条件は使えろ

第 3 問

[解] $a \geq 0, b \geq 0 \dots ①$ $c=0$ の時、 $q(x)$ は二次関数で、その最大は端点、であるので、 $|x| \leq 1$ の時、

$$\min\{q(-1), q(1)\} \leq q(x) \leq \max\{q(-1), q(1)\}$$

$$\Leftrightarrow a-b \leq q(x) \leq a+b \quad (\because ①) \quad \dots ②$$

で、一方、 $|p(\pm 1)| \leq 1$ から

$$-1 \leq a \pm b \leq 1 \quad \dots ③$$

である。②③ から、 $|q(x)| \leq 1$ となる区間は成立する、以下、 $c \neq 0$ とする。 $q(x)$ は二次関数で、

その最本は単独ない端点である。

$$\begin{cases} q(1) = a+b+c \\ q(-1) = a-b+c \\ q(-\frac{b}{2c}) = a - \frac{b^2}{4c} \end{cases} \quad \dots ④$$

で、これらの絶対値が 2 以下なら良い。 $|p(\pm 1)| \leq 1$ から $|a+b+c| \leq 1 \dots ⑤$ から、④⑤より

$$|q(\pm 1)| \leq 1 \quad \dots ⑥$$

となる。次に軸について、 $-1 \leq -\frac{b}{2c} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{b}{2c} \leq 1$ の場合をかんがえれば十分で、

$$\left|q\left(-\frac{b}{2c}\right)\right| = \left|a - \frac{b^2}{4c}\right| \leq |a| + \left|\frac{b^2}{4c}\right| \leq |a| + \left|\frac{b}{2}\right| \quad (\because ⑦)$$

$$\leq a+b \quad (\because ①) \quad \dots ⑧$$

一方、 $p(x)$ の値域の幅が 2 以下だから、

$$|p(0) - p(-1)| \leq 2 \Leftrightarrow |a+b| \leq 2 \quad \dots ⑨$$

⑧⑨から

$$\left|q\left(-\frac{b}{2c}\right)\right| \leq 2 \quad \dots ⑩$$

⑧⑩から、 $|x| \leq 1$ に対して $|q(x)| \leq 2$ である。よって $c \neq 0$ の場合も示した。

以上から問題は示された。■

[解2]

$$|cx^2 + bx + a| = |c(x^2 - 1) + a + bx + c|$$

$$\leq \underbrace{|c||x^2 - 1|}_{①} + \underbrace{|bx + c|}_{②}$$

で、

$$① \leq |c| = |p(0)| \leq 1$$

$$② \leq |a \pm b + c| = |p(\pm 1)| \leq 1$$

だから

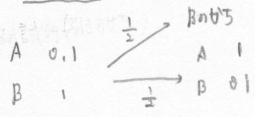
$$|q(x)| \leq 1 + 1 = 2 \quad \text{■}$$

第 4 問

第 問

第 5 問

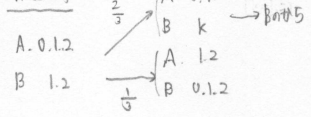
[解] (1) $n=1$ の時



上図から、

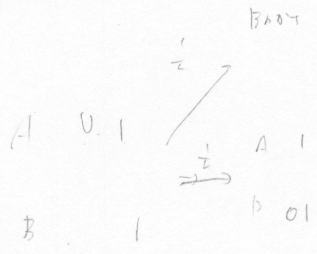
$$\begin{cases} p_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} p_1 \\ p_1 = \frac{1}{2} p_1 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} p_1 = \frac{1}{3} \\ p_1 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$n=2$ の時



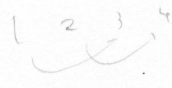
上図から、

$$\begin{cases} p_2 = \frac{1}{3} p_2 \\ p_2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} p_2 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} p_2 = \frac{1}{4} \\ p_2 = \frac{3}{4} \end{cases}$$

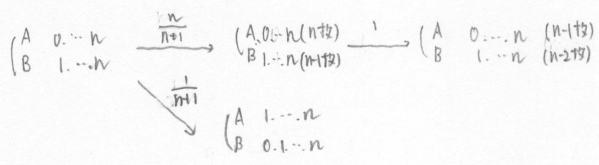


$$\frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} p_2 \right) = p_2$$

$$2 + p_2 = 9 p_2$$



(2) $n \geq 3$ の時、下図のようになる。



以下、数学的帰納法。

$$\begin{cases} p_n = \frac{1}{n+1} p_n + \frac{n}{n+1} p_{n-2} \\ p_n = \frac{1}{n+1} p_n + \frac{n}{n+1} p_{n-2} \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}$$

とある。まず、 $p_n + p_{n-2} = 1$ であることを示す。 $n=1, 2$ では (1) から成立。 $n=k, k+1 (k \in \mathbb{N})$ のとき成立を仮定すると、①から、②が成立する。

$$0 \cdot \frac{k+2}{k+3} (p_{k+2} + p_{k+2}) = \frac{k+2}{k+3} \quad \therefore p_{k+2} + p_{k+2} = 1 \quad (\because k > 0)$$

よって、 $n=k+2$ でも成立する。以上から示すことができた。

以下、②から、

$$p_n - \frac{1}{n+1} (1 - p_n) = \frac{n}{n+1} p_{n-2}$$

$$-(n+2) p_n + n p_{n-2} = 1$$

(3) $r_n = (n+2) p_n$ とおく。(2) から、

$$r_{n+2} = r_n + 1$$

よって、 $r_1 = 3 \cdot p_1 = 1, r_2 = 4 \cdot p_2 = 1$ となる。

$$r_{2k} = k, r_{2k+1} = k$$

$$2k - 1 + 1$$

とある。

$$p_{2k} = \frac{k}{2k+2}, p_{2k+1} = \frac{k}{2k+1}$$

よって、

$$p_n = \begin{cases} \frac{n}{2(n+2)} & (n \in \text{even}) \\ \frac{n+1}{2(n+2)} & (n \in \text{odd}) \end{cases}$$

である。

$$\frac{n+1}{2} = k$$

$$\frac{n+1}{2} = k$$

$$\frac{n+1}{2} = k$$

第 6 問

【解】 $x=t$ ($t>0$) の C の接線は

$$y = -\frac{1}{t^2}x + \frac{2}{t}$$

で、これが A を通る時、

$$0 = -\frac{1}{t^2}a + \frac{2}{t} \therefore a = 2t$$

である ($\because t>0$) から、

$$L_a: y = -\frac{4}{a^2}x + \frac{4}{a} = f_a(x)$$

である。

(1) L_a と $RQ: y = -\frac{1}{2}x + 2$ の交点の座標は、 y を求めた

$$-\frac{4}{a^2}x + \frac{4}{a} = -\frac{1}{2}x + 2$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{a^2}\right)x = 2 - \frac{4}{a}$$

の解。 $0 < a < 4 \dots \textcircled{1}$ から、 $a \neq 2$ 。 $\textcircled{2}$ のもとで、

$$\left\{ \begin{aligned} x_0 &= \frac{\frac{2a^2-4}{a}}{\frac{a^2-8}{2a^2}} = \frac{4a(a-2)}{a^2-8} \\ y_0 &= \frac{4(a-4)}{a^2-8} \end{aligned} \right.$$

だから、 $0 < x_0 < y_0 \Leftrightarrow 0 < a < 2$ ($\because \textcircled{1}$) である。以上から条件は $\textcircled{1} \wedge \textcircled{2} \wedge 0 < a < 2$ 。

$$0 < a < 2$$

(2) $0 < a < 2$ のもとで T が求まる。

$$T + S_1 = \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4$$

$$T + S_2 = \frac{4}{a} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{4}{a} = 2$$

から、 $S_1 = 4 - T, S_2 = 2 - T$ となる。

$$t = 6 - 2T, m = (4 - T)(2 - T) \quad \dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{3}$ から、 T を求めた。

$$m = \frac{1}{4}(t+2)(t-2) = \frac{1}{4}(t^2 - 4) \quad \dots \textcircled{4}$$

また、 $\textcircled{3}$ のもとで、 $T = 4 - S_1$ と $T = 2 - S_2$ より、

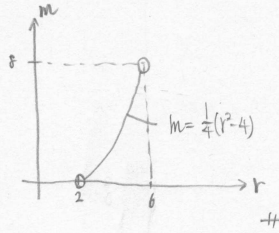
$$\begin{aligned} T &= \Delta OAM + \Delta OQM \\ &= \frac{1}{2}ax_0 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot y_0 = \frac{2x_0 + ay_0}{2} = \frac{4a(3a-8)}{2(a^2-8)} \\ &= 2 \left[3 + 8 \frac{3+a}{a^2-8} \right] \end{aligned}$$

である。 $\left(\frac{3+a}{a^2-8}\right)' = -\frac{(8-a)+2a(3-a)}{(a^2-8)^2} = \frac{-(a-2)(a-4)}{(a^2-8)^2} > 0$ から T は単調増加。

よって $T \rightarrow 0$ ($a \rightarrow 0$)、 $T \rightarrow 2$ ($a \rightarrow 2$) から

$$0 < T < 2 \therefore 2 < t < 6 \quad (\because \textcircled{3}) \quad \dots \textcircled{5}$$

$\textcircled{4} \wedge \textcircled{5}$ を図示した図。



$$a(a$$

$$a-2 < 0 \wedge a-4 < 0$$

$$\frac{2 \cdot 2 \cdot (-2)}{-4}$$

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot y_0 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x_0$$

$$= \frac{2a(a-2)}{a^2-8} + \frac{2a^2-16}{a^2-8}$$

$$\frac{4a-16}{4(a-4)}$$

$$\frac{3}{a^2-8} \left[\frac{3a^2-8a}{3a^2} - \frac{-8a+24}{a^2-8} \right]$$

$$= (a^2 - 6a + 8)$$

$$= (a-2)(a-4)$$