

第 1 問

[解] $a+b+c=0$ について、対称性から $a \leq b \leq c$ とする。

もし $c < 0$ ならば $a+b+c < 0$ となり不適。又、もし $a > 0$ ならば $a+b+c > 0$ となり不適だから $a \leq 0 \leq c$ であるから、以下のいずれかである。

1° $a \leq b \leq 0 \leq c$ の時

$$(与) \Leftrightarrow |bc| + |ca| + |ab| + bc + ca + ab \geq 0 \quad (\because a+b+c=0)$$

$$\Leftrightarrow -bc - ca + ab + bc + ca + ab \geq 0$$

$$\Leftrightarrow ab \geq 0 \quad -0$$

①は明らか ($\because a, b \leq 0$) だから、(与)は成立し、等号成立は

①の表すから $ab=0$ の時つまり $a=0$ かつ $b=0$

2° $a \leq 0 \leq b \leq c$ の時

$$1^\circ \text{ と同じ } (与) \Leftrightarrow bc \geq 0 \quad -② \text{ である。} \quad ② \text{ は } b, c \geq 0 \text{ が明らか}$$

だから、(与)は成立。等号成立は $bc=0$ つまり $b=0$ かつ $c=0$ 。

以上から $(|a| + |b| + |c|)^2 \geq 2(a^2 + b^2 + c^2)$ は成立し、等号成立は

$abc=0$ の時 同

第 問

問 2 第

第 3 問

▷ a, b を変数で表し、変数を付け替える

変数を付け替える時、三角は見ずらくて危ない

⇒ ためて Δ ならすぐ方針転換を

▷ フォアの変数設定のあしきけは、その変数の条件式に代入するだけである!

第 3 問

[解]

円の方程式は

$$C: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \quad \text{①}$$

$P(x, 0), Q(0, y)$ とおく

$(0 < x, y)$ と.

$$PQ: \frac{x}{X} + \frac{y}{Y} = 1$$

PQ は C の中心 $(1, 1)$ の方が 1 だから

$$r = \frac{|1x + 1y - XY|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 1$$

両辺 0 以上だから 2 乗して

$$x^2 + y^2 + x^2y^2 + 2xy - 2x^2y - 2xy^2 = x^2 + y^2$$

$xy \neq 0$ から

$$xy + 2 - 2x - 2y = 0 \quad \text{②}$$

又 PQ の中点 M として $\overline{RM} = \frac{\sqrt{2}}{2} PQ$ から

$$\overrightarrow{OR} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \quad (\because R \text{ は第一象限})$$

よって $R(a, b)$ とおく

$$a = \frac{1}{2} (x + \sqrt{2}y)$$

$$b = \frac{1}{2} (y + \sqrt{2}x)$$

$$\therefore \begin{cases} x = -a + \sqrt{2}b \\ y = \sqrt{2}a - b \end{cases}$$

①② に代入して、又 $0 < x, y$ から

$$(-a + \sqrt{2}b)(\sqrt{2}a - b) + 2 - 2(-a + \sqrt{2}b + \sqrt{2}a - b) = 0$$

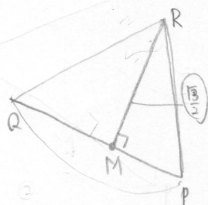
$$-\sqrt{2}a^2 - \sqrt{2}b^2 + 4ab + 2 + 2(1 - \sqrt{2})a + 2(1 - \sqrt{2})b = 0$$

$$\sqrt{2}b > a, \sqrt{2}a > b$$

[解] ... と言え、三角で出来たかというのには 7 に落ちぬ...

$$\frac{R}{2Y} \dots \frac{1}{2} \geq \frac{R}{4R}$$

$$R \geq 2Y$$



[方針のミス]

・土曜日にレポート提出を促した。

全ての学生が了解した。

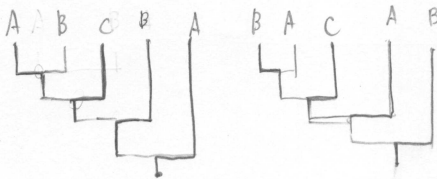
問 第

第 4 問

[解] (1) A又はBが2連勝する確立は:

$$\frac{1}{2} \cdot (1-p) \cdot 2 = \frac{1-p}{1}$$

(2)



4度までで優勝者が決まるのは、上の様に勝者が

(A, C, B, A) と (B, C, A, B) となる時で、この確立は

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot p \cdot (1-p) = \frac{p(1-p)}{1}$$

(3) (Aの優勝する確立) + (Bの) + (Cの) = 1 から、これらが等しい時、

Aの優勝する確立 P_A とし、 $P_A = \frac{1}{3}$ である。

さて、先に2勝した人の優勝のためゲームは多くとも4回しか行われないから、何回ゲームが行われるかで場合分けする

1° 2回

(1) から、Aが優勝する確立は $1-p$

2° 3回

対戦のやり方からして、Aが3回戦で優勝することはない

3° 4回

(2) から、Aが優勝する確立は $\frac{1}{2} p(1-p)$

以上から

$$P_A = (1-p) + \frac{1}{2} p(1-p) = \frac{1}{2} (1-p)(1+p) = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{1}{3} \quad (\because p > 0)$$

$$p = \frac{1}{3}$$

$$p = \frac{1}{3}$$

$$3(-p^2 - p + 2) = 2$$

$$3p^2 + 3p - 4 = 0$$

$$3(1-p^2) = 2$$

$$3p^2 + 3p - 4 = 0$$

第 問

第 5 問

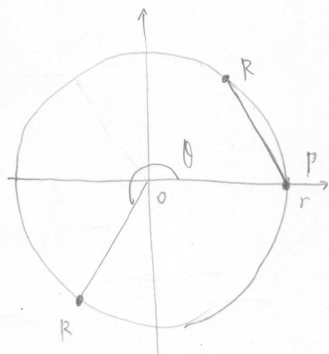
[解] $2\pi r > 1 \cdots ①$

OPからOQにへる角 θ をかく

($0 \leq \theta < 2\pi$) と

$$r\theta = 1 \quad \cdots ②$$

7-63



1° $0 < \theta \leq \pi$ の時. (②から $\frac{1}{r} \leq \theta$)

$S(\theta)$ は右図斜線部の面積に等しく.

$$S(\theta) = \text{扇形} - \text{三角形}$$

$$= \frac{1}{2} \theta r^2 - \frac{1}{2} r^2 \sin \theta$$



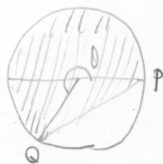
2° $\pi \leq \theta < 2\pi$ の時

$S(\theta)$ は右図斜線部の面積に等しく

$$S(\theta) = \text{扇形} + \text{三角形}$$

$$= \frac{1}{2} \theta r^2 + \frac{1}{2} r^2 \sin(2\pi - \theta)$$

$$= \frac{1}{2} \theta r^2 - \frac{1}{2} r^2 \sin \theta$$



以上から、いずれにせよ $S(\theta) = \frac{1}{2} \theta r^2 - \frac{1}{2} r^2 \sin \theta$ である. ②から

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \frac{1}{\theta^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{\theta^2} \sin \theta$$

$$\frac{dS}{d\theta} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\theta^3} - \frac{1}{2} \frac{1}{\theta^4} (\cos \theta \cdot \theta^2 - \sin \theta \cdot 2\theta)$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{1}{\theta^3} [\theta + \cos \theta \cdot \theta - 2 \sin \theta]$$

この正負は $f(\theta) = -(\theta + \cos \theta - 2 \sin \theta)$ の正負に等しい.

$$f'(\theta) = -(1 - \sin \theta - 2 \cos \theta)$$

$$= -(1 - \sin \theta - \cos \theta)$$

$$f''(\theta) = \cos \theta$$

例. 下表をえる

θ	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
f''	+	0	-	0	+
f'	0	↗	↘	↗	0

これから $\pi/2 < \theta < 3\pi/2$ かつ $f'(\theta) = 0$ である θ が唯一つある. 下表をえる

θ	0	π	2π
f'	+	-	+
f	0	↗	↘

よって $f(\pi) = 0$ から 下表をえる

θ	0	π	2π
S'	+	-	+
S	0	↗	↘

よって S は $\theta = \pi$ で max である

$$\max S(\theta) = \frac{1}{2} \frac{1}{\pi^2}$$

$$\theta = \pi \quad \frac{1}{2} \frac{1}{\pi^2}$$

$$\frac{1}{2} \pi r^2$$

$$\pi - \pi = 0$$

$$\frac{1}{2} r$$

$$f(0) = 0$$

$$0$$

$$f(\pi/2) = 2 - \frac{\pi}{2} > 0$$

$$f(\pi) = 0$$

第 問

第 6 問

[解]

$$\begin{aligned} (1) \quad I_{n+1} &= \int_1^e (\log x)^{n+1} dx \\ &= \left[x (\log x)^{n+1} \right]_1^e - \int_1^e (n+1) (\log x)^n dx \\ &= e - (n+1) I_n \end{aligned}$$

$$(2) \quad \frac{e-1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{(n+1)e+1}{(n+1)(n+2)} \quad \text{①が全ての } n \in \mathbb{N} \text{ で成立する。②}$$

を M.I. で示す。

1° $n=1$ のとき

$$I_1 = \left[x (\log x - 1) \right]_1^e = 1 \text{ と } 2.7 < e < 2.8 \text{ から}$$

$$1 - \frac{e-1}{2} > 1 - \frac{1.8}{2} > 0$$

$$\frac{2e+1}{2 \cdot 3} - 1 > \frac{5.4-5}{6} > 0$$

よって $n=1$ では成立

2° $n=k$ で成立したとき ($k \in \mathbb{N}$)

$n=k+1$ のとき成立する

$$\frac{e-1}{k+2} \leq I_{k+1} \leq \frac{(k+1)e+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{e-1}{k+2} \leq e - (k+1) I_k \leq \frac{(k+1)e+1}{(k+1)(k+2)} \quad (\because (1))$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+1)e-1}{(k+1)^2(k+2)} \leq I_k \leq \frac{(k+1)e+1}{(k+1)(k+2)} \quad (\because k \in \mathbb{N}) \dots \text{③}$$

示せば良い。③の右側は仮定から成立するので左側の不等式を示す。

$$[\text{補題 1}] \quad \frac{e}{n+2} \leq I_n$$

[証明]

[1] で $0 \leq \log x \leq 1$ であるから、 $(\log x)^n \geq (\log x)^{n+1}$ となる。

同じ区間で積分して $I_n \geq I_{n+1}$ 。この式に (1) を代入して

$$I_n \geq e - (n+1) I_n$$

$$\therefore I_n \geq \frac{e}{n+2} \quad (\because n \in \mathbb{N}) \quad \square$$

$$[\text{補題 2}] \quad \frac{e}{n+2} \geq \frac{(n+1)^2 e - 1}{(n+1)^2 (n+2)}$$

[証明]

$$(左辺) - (右辺) = \frac{-1}{(n+1)^2 (n+2)} > 0 \quad (\because n \in \mathbb{N}) \text{ から示された。}$$

[補題 1], [補題 2] から ③の左側の不等式は示された。従って $n=k+1$ でも成立。

以上 1°, 2° から ③は示された。従って問題意は示された。 $\square$

[別解]

$I_{n+1} \leq I_n$, $I_{n+2} \leq I_{n+1}$, $I_1 = 1$ だから漸化式に代入すると
ある n のとき問題意の式を得る。