

第 1 問

[解] (1) から $f(x) \rightarrow 0 \ (x \rightarrow 1)$ が必要で $f(x)$ の 3 次係数から

$f(x) = (x-1)g(x)$ ($g(x)$ は 2 次係数 1 の 2 次式) とおける. (1) に代入

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{x(x-1)} = 1 \Leftrightarrow g(1) = 1$$

よって $g(x) = x^2 + dx + \beta$ とおくと $d + \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = -d$ である.

$$g(x) = x^2 + dx - d$$

以上から

$$f(x) = (x-1)(x^2 + dx - d)$$

とおける.

$$f(x) = x^3 + dx^2 - dx - x^2 - dx + d = x^3 + (d-1)x^2 - 2dx + d$$

から $f(x) = 1 - d - d < 0 \ (\because (2)) \Leftrightarrow d > 0 \dots \textcircled{1}$

また (3) から $f(0) = d$. $f(1) = 0$ から

$$h(x) = (-d)(x-1) = h(x)$$

よって

$$f(x) - h(x) = (x-1)(x^2 + dx - d) - (-d)(x-1)$$

① から $[0, 1]$ 上で $f(x) - h(x) \leq 0$ 以下で示す.

$$\frac{3}{4} = \int_0^1 |f(x) - h(x)| dx$$

$$= - \int_0^1 x(x-1)(x+d) dx$$

$$= - \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{d-1}{3}x^3 - \frac{d}{2}x^2 \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{6}d + \frac{1}{12}$$

$\therefore d = 4$ (よって ① を満たす)

よって

$$f(x) = (x-1)(x^2 + 4x - 4) = x^3 + 3x^2 - 5x + 4$$

(2) から

$$(a, b, c) = (3, -5, 4)$$

$$b = 8, c = 4$$

$$x^3 - (x-1)(x^2 + 4x - 4)$$

$$x^3 - (x^3 + 4x^2 - 4x - x^2 - 4x + 4) = -3x^2 + 8x - 4$$

$$-3x^2 + 8x - 4 = -(3x^2 - 8x + 4)$$

$$d = 4 > 0$$

$$(x^2 + dx - d)(x-1)$$

$$x[x^2 + (d-1)x - d]$$

$$x^3 + (d-1)x^2 - dx$$

$$\frac{1}{4} + \frac{d-1}{3} - \frac{d}{2}$$

$$-\frac{d}{6} - \frac{1}{12}$$

$$x^3 + 3x^2 - 5x + 4$$

$$(x-1)(x^2 + 4x - 4)$$

問 第

第 2 問

[解](1) $f(x) = x^3 - 3ax$, $f'(x) = 3x^2 - 3a$ から、 a に $\pm$ した表を得る

1° $a > 0$

x	$-\sqrt{a}$	$\sqrt{a}$
f'	+	-
f	$\nearrow$	$\searrow$

2° $a \leq 0$

$f(x)$ は単調増加で $f(x) = t$ なる t は1つとして存在しない

$$a\sqrt{a} - 3a\sqrt{a}$$

$$-2a\sqrt{a}$$

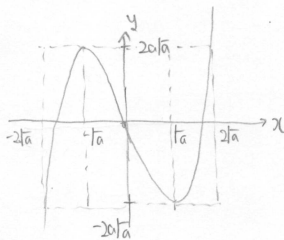
従って、1°の時を考える。この時、グラフは右図のようになるから

$f(x) = t$ の解が $y = f(x)$ と $y = t$ の

交点の x 座標に対応している

ことから

$$a > 0 \wedge -2a\sqrt{a} < t < 2a\sqrt{a}$$



(2) (1)の考察から、 $a > 0$ が必要で、この時、グラフは下図のようになる

($x = f(x)$ とおいて、 $y = f(x)$ のグラフ)

$f(x)$ は3次関数であるから、

$f(x) = t$ をみたす x は高々3つ

しかないこと。左のグラフから、

$f(x) = 0$ の各々の交点の x 座標

に3つずつの x が対応している時のみ、 $f(f(x)) = 0$ は9個実解を持つ。

(1)のグラフから、この時互いに x が被ることはない。従って(1)から、 t と

める条件は、 $a > 0$ のもとで、

$$-2a\sqrt{a} < -\sqrt{3a}, \sqrt{3a} < 2a\sqrt{a}$$

$$\Leftrightarrow a > \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (a > 0 \text{ をみたす})$$

よって、

$$a > \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x^2 = 3a$$

$$-2a < -\sqrt{3}$$

$$a > \frac{\sqrt{3}}{2}$$

問 第 問

第 3 問

【解】(1)点 X に対し、その位置ベクトルを $\vec{x}$ で定めろ (ただし、 $\vec{a}_0 = \vec{a}$ とする)

$$\begin{cases} \vec{a}_1 = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}) \\ \vec{b}_1 = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}) \\ \vec{c}_1 = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}) \\ \vec{d}_1 = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}) \end{cases}$$

よって、 $\vec{e} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d})$ とする

$$\vec{TA}_1 = -\frac{1}{3}\vec{a}, \quad \vec{TB}_1 = -\frac{1}{3}\vec{b}, \quad \vec{TC}_1 = -\frac{1}{3}\vec{c}, \quad \vec{TD}_1 = -\frac{1}{3}\vec{d}$$

より、 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{d}|$ とから、 $|\vec{TA}_1| = |\vec{TB}_1| = |\vec{TC}_1| = |\vec{TD}_1|$ となる。

つまり、 $\vec{P}_1 = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d})$ とすれば、 A_1, B_1, C_1, D_1 は P_1 を中心とする半径 $\frac{1}{3}|\vec{a}|$ の円周上にある。

の円周上にある。

(2) (1) と同様にして、 $\vec{e}_n = \vec{a}_n + \vec{b}_n + \vec{c}_n + \vec{d}_n$ とおく

$$\begin{cases} \vec{a}_{n+1} = \frac{1}{3}(\vec{e}_n - \vec{a}_n) \\ \vec{b}_{n+1} = \frac{1}{3}(\vec{e}_n - \vec{b}_n) \\ \vec{c}_{n+1} = \frac{1}{3}(\vec{e}_n - \vec{c}_n) \\ \vec{d}_{n+1} = \frac{1}{3}(\vec{e}_n - \vec{d}_n) \end{cases} \quad \cdots \textcircled{1}$$

よって、

$$\vec{e}_{n+1} = \vec{e}_n$$

より、 $\vec{e}_n = \vec{e}_1 = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{e}$ とおける。

($k = a, b, c, d$)

$$\vec{k}_{n+1} = \frac{1}{3}(-\vec{k}_n + \vec{e})$$

$$\vec{k}_{n+1} - \frac{1}{4}\vec{e} = -\frac{1}{3}(\vec{k}_n - \frac{1}{4}\vec{e})$$

等比数列の公式から

$$\vec{k}_n = (-\frac{1}{3})^n(\vec{k}_0 - \frac{1}{4}\vec{e}) + \frac{1}{4}\vec{e}$$

従って、 $\vec{k}_n = \frac{1}{4}\vec{e} - \frac{1}{4}\vec{e}(-\frac{1}{3})^n$ とおける。

$$|\vec{k}_n| = (-\frac{1}{3})^n |\vec{k}_0|$$

より、これは n によらずに一定値をとり、 A_n, B_n, C_n, D_n は P_n を中心とする円周上にある。

従って、

$$\begin{aligned} |\vec{P}_n \vec{P}_{n+1}| &= \left| \frac{1}{4}\vec{e} \left[1 - (-\frac{1}{3})^{n+1} - \left(1 - (-\frac{1}{3})^n \right) \right] \right| \\ &= \frac{1}{3}(-\frac{1}{3})^n |\vec{e}| \\ &= -(-\frac{1}{3})^{n+1} (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}) \end{aligned}$$

(3) $\vec{P}_n$ の表から

$$\vec{P}_n \vec{Q} = \vec{e} - \frac{1}{4}\vec{e} + \frac{1}{4}\vec{e}(-\frac{1}{3})^n$$

$$\rightarrow \vec{e} - \frac{1}{4}\vec{e} \quad (n \rightarrow \infty)$$

より、 $|\vec{P}_n \vec{Q}| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$ となる。 $\vec{e} = \frac{1}{4}\vec{e}$ の時

$$\vec{e} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d})$$

【別解】(予想はなし)

(1) $\angle A_1 B_1 C_1 = \alpha$, $\angle A_1 B_1 D_1 = \beta$ とおくと、漸化式から

$$\cos \alpha = \cos \angle A_0 B_0 C_0, \quad \cos \beta = \cos \angle C_0 B_0 A_0$$

よって、

第 問

第 4 問

[解] $f(x) = a^x - ax$ とおく. $x > 0$ に対し $f(x) > 0$ となる a の条件を求めたい. ($a > 0$) $0 < a \leq 1$ とすると $f(x) \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow \infty$) から不適. 従って $1 < a$ として考える.

$$f'(x) = a [a^{x-1} \log a - 1]$$

から下表をえる ($\because 1 < a$). f は $x=1$ で $a^{x-1} = \frac{1}{\log a}$ を最小値とす.

x	0	1	∞
f'		-	+
f		$\searrow$	$\nearrow$

従って $f(a) > 0$ ならければよい.

$$\frac{f(a)}{a} = a^{a-1} - a = \frac{1}{\log a} - a > 0$$

$$\Leftrightarrow a \leq \frac{1}{\log a} \quad \text{②}$$

又 $a > 1$ から ①の両辺 自然対数をとって.

$$(a-1) \log a = -\log(\log a)$$

$$a = 1 - \frac{\log(\log a)}{\log a} \quad \text{③}$$

③を②に代入

$$1 - \frac{\log(\log a)}{\log a} \leq \frac{1}{\log a}$$

$$\log \frac{a}{\log a} \leq 1$$

$\log a$ は a について単調増加なので.

$$\frac{a}{\log a} = e$$

$$e \log a - a \geq 0 \quad (\because a > 1 \text{ から } \log a > 0) \quad \text{④}$$

この左辺 $g(a)$ とおく. $g'(a) = \frac{e}{a} - 1$ したがって下表をえる

a	1	e
g'		+
g		$\nearrow$

従って ④を満たす a は $a = e$

だけであるから. a とめる a は

$$\underline{a = e}$$

[別解]

$a^x \geq ax$ かつ $x \in \mathbb{R}, a > 0$ で成立する. $a > 0$ から両辺 x から

$$\log a$$

$$x - 1 \geq \log a$$

ここで $x=1$ のとき $a = e$ となるから. a とは $a = e$ だけである.

問 第 第

第 5 問

[解] 題意から、とりだした同じ数はどれも少なくとも2つ以上あるから、

合計6つから3種数以下で、異なる数A, B, Cとして以下の

いすか ($A \geq B \geq C$)

$$(A, B, C) = \underset{\text{①}}{(2, 2, 2)} \underset{\text{②}}{(4, 2, 0)} \underset{\text{③}}{(3, 3, 0)} \underset{\text{④}}{(6, 0, 0)}$$

1°の時

3数のえらび方が nC_3 通り、これらにならぶ方法が

$$6C_2 - 4C_2 = 90 \text{ 通りで、合計 } nC_3 \times 90 = 15n(n-1)(n-2) \text{ 通り}$$

2°の時

2数のえらび方が nP_2 通り、ならぶ方法が $6C_2 = 15$ 通りで、

$$\text{合計 } 15nP_2 = 15n(n-1) \text{ 通り}$$

3°の時

同様にして $nC_2 \cdot 6C_3 = 10n(n-1)$ 通り

4°の時

とり出す数を考えて、 n 通り

以上から

$$15n(n-1)(n-2) + 15n(n-1) + 10n(n-1) + n$$

$$= n[15n^2 - 20n + 6]$$

$$\begin{aligned} & n(n-1)[15(n-2+1)+10] \\ & 5n(n-1)[3(n-1)+2] \\ & 5n(n-1)(3n-1)+n \\ & n[5(3n^2-4n+1)+1] \\ & -15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 15 \\ & n(n-1)[15(n-2+1)+10]+n \\ & 15(15n-5) \\ & 5n \\ & 5n(n-1)(3n-1)+n \\ & [5(3n^2-4n+1)+1]n \end{aligned}$$

第 6 問

[解答] 通分して

$$\frac{(a_1x+b_1)(x+c_2) - (a_2x+b_2)(x+c_1)}{(x+c_1)(x+c_2)} > 0$$

---①

この分母 $f(x)$ とおく。

$$f(x) = (a_1 - a_2)x^2 + (a_1c_2 + b_1 - b_2 - a_2c_1)x + b_1c_2 - b_2c_1$$

① 恒等式で成立する必要十分条件は、 $(x \neq -c_1, -c_2)$

$$\begin{cases} a_1 - a_2 > 0 \\ f(x) = (a_1 - a_2)(x+c_1)(x+c_2) \text{ が } x_1 = -c_1 \text{ の値等 } \end{cases}$$

---*

である。係数比較して、

$$\begin{cases} (a_1 - a_2)(c_1 + c_2) = a_1c_2 - a_2c_1 + b_1 - b_2 \\ (a_1 - a_2)c_1c_2 = b_1c_2 - b_2c_1 \\ a_1c_1 - a_2c_2 = b_1 - b_2 \\ (a_1 - a_2)c_1c_2 = b_1c_2 - b_2c_1 \\ b_1 - a_1c_1 = b_2 - a_2c_2 \\ c_1(b_2 - a_2c_2) = c_2(b_1 - a_1c_1) \end{cases}$$

---②

よって、②から、 $C_1 = C_2$ である場合分け。

$$\begin{cases} 1^\circ C_1 = C_2 \\ b_2 - a_2C_2 = b_1 - a_1C_1 \text{ となる。} \\ 2^\circ C_1 \neq C_2 \\ b_2 - a_2C_2 = b_1 - a_1C_1 = 0 \text{ となる。} \end{cases}$$

1. 恒等式となる条件は

$$C_1 = C_2 \wedge b_2 - a_2C_2 = b_1 - a_1C_1 \wedge a_1 > a_2$$

又は

$$C_1 \neq C_2 \wedge b_2 = a_2C_2 \wedge b_1 = a_1C_1 \wedge a_1 > a_2$$

---*

である。



$$a_1, c_1 + a_2, c_2 = a_2$$