

第 1 問

[解] $F(G(x)) = -\{F(x)\}^2 + pG(x) + q \dots ①$

①の両辺を x で微分出来て、

$$F'(G(x)) \cdot G'(x) = -2F(x) \cdot F'(x) + pG'(x) \dots ②$$

与えから、 $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = -f(x)$ だから②に代入して、

$$-f(G(x)) \cdot f(x) = -2F(x) \cdot f(x) - pf(x)$$

$$f(x) \cdot \{f(G(x)) - 2F(x) - p\} = 0$$

となる。 $f(x)$ は恒等的に0ではないから、

$$f(G(x)) - 2F(x) - p = 0 \dots ③$$

ここで、 $f(x)$ が n 次 ($n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) だとすると、 G, F は $n+1$ 次である。したがって、

$$\begin{array}{ll} f(G(x)) \text{ の最高次} & \dots n(n+1) \\ F(x) & \dots n+1 \end{array} \dots ④$$

となる。 $n=0$ の時、③の左辺は1次関数になって不適だから、 $n \geq 1$ である。したがって

④の両者が等しいことが必要で、 $n=1$ となる。つまり、 $f(x) = dx + \beta$ ($d \neq 0$) とおける。 $\dots ⑤$

(1) $a = \int_0^1 f(x) dx$ とおくと、与えから、 $G(x) = a - F(x)$ である。⑤から、

$$F(x) = \frac{1}{2}dx^2 + \beta x \dots ⑥$$

だから、③に代入して、

$$d(a - F(x)) + \beta - d\left(\frac{1}{2}dx^2 + \beta x\right) - p = 0$$

$$\left(-d - \frac{1}{2}d^2\right)x^2 + (-2\beta - d\beta)x + ad + \beta - p = 0$$

係数比較して、 $d \neq 0$ から

$$\begin{cases} d = -\frac{1}{2}d^2 \\ \beta(2+d) = 0 \\ ad + \beta = p \end{cases} \therefore \begin{cases} d = -2 \\ p = \beta - 2a \end{cases} \dots ⑦$$

ここで、 $a = \left[\frac{1}{2}dx^2 + \beta x\right]_0^1 = \frac{1}{2}d + \beta = \beta - 1$ ($\because ⑦$) $\dots ⑧$ だから⑦に代入して、

$$p = -a + 1 \dots ⑨$$

となる。以上から

$$F(x) = \frac{1}{2}dx^2 + \beta x = -x^2 + (a+1)x \quad (a+1-2a) \dots ⑩$$

が必要。逆にこの時、①に代入して、

$$-(a-F(x)) + (a+1)(a-F(x)) = -\{F(x)\}^2 + p(a-F(x)) + q$$

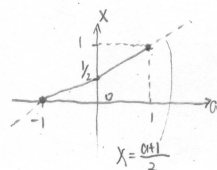
$$(a-1)F(x) + a = (a-1)F(x) + pa + q \quad (\because ⑩)$$

となり、 $q = a - pa$ とすれば良いから与え。以上から、

$$F(x) = -x^2 + (a+1)x$$

(2) $F(x) = -\left(x - \frac{a+1}{2}\right)^2 + \frac{(a+1)^2}{4}$ だから、右図より、

$$\begin{cases} a \leq -1 \text{ の時、} \max F(x) = F(0) = 0 \\ -1 \leq a \leq 1 \text{ の時、} \max F(x) = F\left(\frac{a+1}{2}\right) = \frac{(a+1)^2}{4} \\ 1 \leq a \text{ の時、} \max F(x) = F(1) = a \end{cases}$$



だから、 $\frac{1}{2}$ に一致する a は、 $a = \sqrt{2} - 1$ の時のみで、⑩に代入して

$$f(x) = -2x + \sqrt{2} \quad (\because ⑩)$$

[別解(1)] $f(x) \neq 0$ から、 $G(x) \neq 0$ である。 $y = G(x)$ とすると $y + F(x) = a$ から、①に代入して、

$$\begin{aligned} F(y) &= -(a-y)^2 + p y + q \\ &= -y^2 + (p+2a)y - a^2 + q \end{aligned}$$

$$\therefore F(x) = -x^2 + (p+2a)x - a^2 + q$$

だから、 $f(x) = F'(x) = -2x + (p+2a)$ だから

$$\begin{aligned} a &= \int_0^1 (-2x + (p+2a)) dx \\ &= -1 + p + 2a \end{aligned}$$

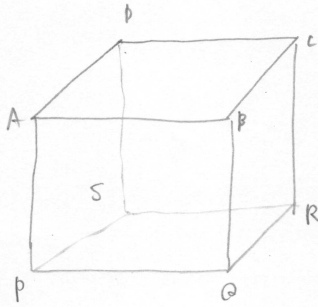
$$\therefore p = 1 - a$$

から、

$$F(x) = -x^2 + (a+1)x$$

第 2 問

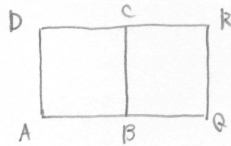
[解]



(1) 右図で A から R へ行く最短経路に

つとく

$$3nC_n = \frac{3n!}{n!2n!} \text{ 通り}$$



(2) 辺 PQ を通って R へ行く経路 α

QB	〃	β
BC	〃	γ
CD	〃	δ
DS	〃	ε
SP	〃	ω

とおくともなる場合の数は

$$h(U) = h(\alpha \cup \beta \cup \gamma \cup \delta \cup \epsilon \cup \omega) \dots \textcircled{1}$$

対称性よりから

$$h(\alpha) = h(\beta) = \dots = 3nC_n$$

$$h(\alpha \cap \beta) = h(\beta \cap \gamma) = \dots = h(\omega \cap \alpha) = h(A \text{ から } Q \text{ へ通って行く経路})$$

$$= 2nC_n$$

①を展開した時出てくる他の項は全て 0 であるから

$$h(U) = 6 \cdot 3nC_n - 6 \cdot 2nC_n$$

2 + 21

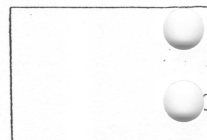
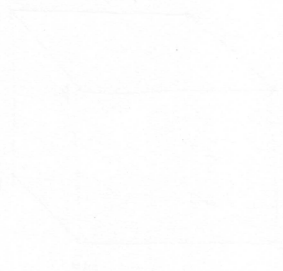
⑥



$$h=1$$

$$3C_1 = 3$$

第 問



第 3 問

[解] ① $C_1: (x-1)^2 + (y-1)^2 = r^2$ とおける. P は C_1 の点

$$y = \frac{1}{2t} (x-1)^2 + t^2 = -\frac{1}{2t} x^2 + t^2 + \frac{1}{2t} \quad (\because t > 0) \text{ かつ } \Delta P O$$

中の点) かつ C_1 は P を通るから

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2t} x^2 + t^2 + \frac{1}{2t} & \cdots \textcircled{1} \\ (t-1)^2 + (t^2-1)^2 = r^2 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①②より $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$(t-1)^2 + \left(\frac{1}{2t} t - \frac{1}{2t}\right)^2 = r^2$$

$$\frac{1}{4t^2} t^2 - (2t + \frac{1}{2t}) t + t^2 + \frac{1}{4} = 0$$

$$t^2 - 2t(4t^2+1)t + t^2(4t^2+1) = 0$$

C_2 上に t がある点に考えよう. t, R は t の 2 次式.

$$t^2 - 2t(4t^2+1)t + t^2(4t^2+1) = 0$$

② 2 解. $t < R$ から

$$t = \frac{t(4t^2+1) - \sqrt{t^2(4t^2+1)^2 - t^2(4t^2+1)}}{2}$$

$$= \frac{t(4t^2+1) - 2t^2\sqrt{4t^2+1}}{2}$$

$$R = \frac{t(4t^2+1) + 2t^2\sqrt{4t^2+1}}{2}$$

$$d = 4t^2+1 \text{ と } d < 2$$

$$\frac{R}{t} = \frac{d+2t\sqrt{d}}{d-2t\sqrt{d}}$$

$$= \frac{d+4t\sqrt{d}+4t^2}{d}$$

$$= \frac{d^2+1+4t\sqrt{4t^2+1}}{d^2} = f(t)$$

$t < R$ から

$$f'(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{d^2+1+4t\sqrt{4t^2+1}}{d^2} \right) > 0$$

②. $\frac{R}{t}$ は t の増加関数. $2t=0$ から $t < R$ から

$$\frac{R}{t} < \frac{R}{t}$$

(2) ① から $\frac{R}{t} = 2$ のとき

$$\frac{d+2t\sqrt{d}}{d-2t\sqrt{d}} = 2$$

$$A = \frac{2t}{\sqrt{d}} \text{ と } d < 2$$

$$\frac{1+A}{1-A} = 2$$

$$\therefore A = \frac{1}{3}$$

f は d の t の関数. 両辺 t を 2 乗して

$$\frac{4t^2}{4t^2+1} = \frac{1}{9} \quad \therefore t = \frac{\sqrt{5}}{5} (\approx 0.447)$$

②

$$P\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{1}{5}\right)$$

[補足]

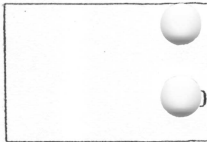
f は t の関数 $f(t) = \frac{d^2+1+4t\sqrt{4t^2+1}}{d^2}$

②. $t > 2$ と $t < R$ から $t < R$

問 第 4 問

[解]

問 第 三 問



午後 92 日

第 5 問

[解] (1) 操作の中で m より大きい玉を引いた時、 $Y > m$ となる。又、途中で引いた玉が全て m 以下ならば $Y \leq m$ だから、 n 回の試行で m 以下の玉だけを引く確率を求めれば良い。

$$P(Y \leq m) = \left(\frac{m-2}{N}\right)^n \quad \text{--- (1)}$$

(2) (1) と同様に考え、操作の中に 1 回以下 $m+1$ 以上の玉を引く確率である k ($k=1, \dots, n$) 回目に $m+1$ 以上の玉を引く時、 $m+2$ 以上を引く確率は

$$\begin{aligned} & \left(\frac{m-2}{N}\right)^{k-1} \left(\frac{N-m+2}{N}\right) \left(\frac{m-1}{N}\right)^{n-k} \\ &= \frac{1}{N^n} \left(\frac{m-2}{m-1}\right)^k \frac{N-m+2}{m-2} (m-1)^n \end{aligned}$$

だから、操作の中に 1 回以下 $m+1$ 以上のカードを引く確率は、 $m+2$ の時

$$\begin{aligned} q &= \left(\frac{m-1}{N}\right)^n \frac{N+2-m}{m-2} \frac{N}{k-1} \left(\frac{m-2}{m-1}\right)^k \\ &= \left(\frac{m-1}{N}\right)^n \frac{N+2-m}{m-2} \frac{m-2}{m-1} \left\{ 1 - \left(\frac{m-2}{m-1}\right)^n \right\} \\ &= (N+2-m) \left\{ \frac{(m-1)^n}{N^n} - \left(\frac{m-2}{N}\right)^n \right\} \end{aligned}$$

である。したがって (1) とあわせて

$$\begin{aligned} P(X \leq m) &= P(Y \leq m) + P(Y > m \wedge X \leq m) = P(Y \leq m) + q \\ &= (-N+m-1) \left(\frac{m-2}{N}\right)^n + (N-m+2) \left(\frac{m-1}{N}\right)^n \quad \dots \text{--- (2)} \end{aligned}$$

又、 $m=2$ の時、2 回目に降参して引く確率で、

$$P(X \leq 2) = \left(\frac{1}{N}\right)^{n-1}$$

となる。これは (2) で $m=2$ としたものに一致するから、

$$P(X \leq m) = (-N+m-1) \left(\frac{m-2}{N}\right)^n + (N-m+2) \left(\frac{m-1}{N}\right)^n \quad \text{--- (3)}$$

1. 2. a_1

$N+2-m$

2. a_1, a_2

$X < Y \leq m$

$n=2$

$Y \leq 3$

1. 2. 3. 4. 5

2. 3. 1. 4

2. 3.

$m=2$

2. 3. 1. 4

$\frac{m-1}{N}$

1. 2.

$m-1, m, m+1, \dots$

2. 3.

1. 3. 4. 5

2. 3. 4

$n=2, N=2$

1. 2. 3. 4

2. 3. 1. 4

2. 3. 1. 4

1. 3. 2. 4

第 6 問

[解] $A(1,1,1)$ $B(-\frac{1}{a}, a, 0)$ $C(-a, 0, \frac{1}{a})$ $D(0, \frac{1}{a}, a)$

$$(1) \vec{AB} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a}-1 \\ a-1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{AD} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{a}-1 \\ a-1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{DC} = \begin{pmatrix} -a \\ \frac{1}{a} \\ \frac{1}{a}-a \end{pmatrix} \text{ となる}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 2\left(\frac{1}{a}-a+1\right) = 0$$

$$\vec{AD} \cdot \vec{DC} = 0$$

$$|\vec{AB}| = |\vec{AD}| = |\vec{DC}| = 2\sqrt{2}$$

よって、 $\square ABCD$ は $\square$ の長 $2\sqrt{2}$ の正方形、同

$$(2) AB: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{1}{a}-1 \\ a-1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ と } x=0 \text{ の交点は}$$

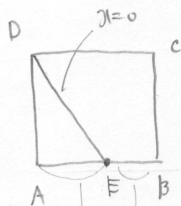
$$t = \frac{1}{\frac{1}{a}+1} \text{ となる点から、} x=0 \text{ と } \square ABCD \text{ の交点は}$$

右図 W_1, W_2 は各々

$\triangle ADE$, $\square EBCD$ の面積比

高は同じ立体だから、体積比

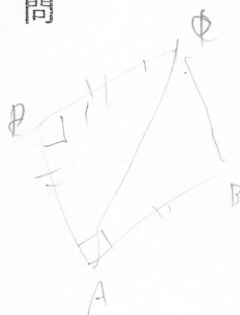
は底面積比に等しい



$$W_1:W_2 = \triangle ADE : \square EBCD = \frac{2a}{a+1} : \frac{2}{a+1}$$

$$= AE:EB+CD = \frac{2\sqrt{2}a}{a+1} : \frac{2(1-\sqrt{2})a+2}{a+1} = 2\sqrt{2}$$

$$= a:a+2 \quad \left(\begin{matrix} \sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} \end{matrix} \right) \quad \left(\begin{matrix} 1 \\ 1+\sqrt{2} \end{matrix} \right)$$



$$\frac{1}{a} + 1 - a + 1$$

$$\frac{1}{a} + 1 - a + 1$$

$$2\left(\frac{1}{a} - a + 1\right)$$

AB

CD

$$\frac{2(\sqrt{2}-1)}{4}$$

$$\frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

$$2\left(a^2 + \frac{1}{a^2} - \right)$$

$$2a+2-2\sqrt{2}a$$

$$\frac{1}{a^2} = \frac{2(3-\sqrt{2})}{9-5} = \frac{3-\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{1}{a} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$3+5$

$$a^2 = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$