第 1 問

[解] ① $\sin f(x) = 1 - x^2$

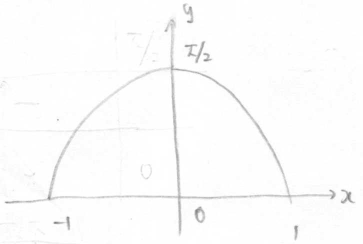
② $0 \le f(x) \le \pi/2$

①から $x = \pm\sqrt{1-\sin y}$ （∵ $-1 \le \sin y \le 1$）…③ だから、グラフは、$x=\sqrt{1-\sin y}$ を考えて、それをy軸に関して折り返せば良い。③の両辺xで微分して

$$1 = \frac{-\cos y}{2\sqrt{1-\sin y}}\frac{dy}{dx} \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-2\sqrt{1-\sin y}}{\cos y} \le 0$$

より、区間内で $y=f(x)$ は単調減少で、$f(0)=\pi/2$, $f(1)=0$ から、

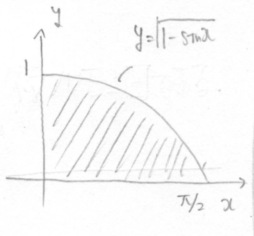
グラフは下図



(2) 題意の面積Sは右図斜線部の面積S'として

$$S = 2S' \cdots ④$$

で与えられる（∵対称性）



$$S' = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin x}\, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\sqrt{1-\sin x}}{\cos x} dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}} dx$$

$$= \left[2(1+\sin x)^{\frac{1}{2}}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= 2(\sqrt{2}-1)$$

だから④に代入して

$$S = 4(\sqrt{2}-1)$$

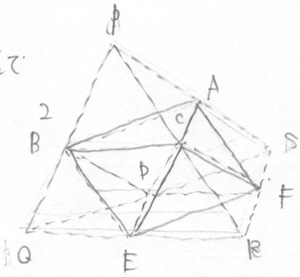
/20

第　　問

0

第 2 問

[解] 右図のように各点おく。

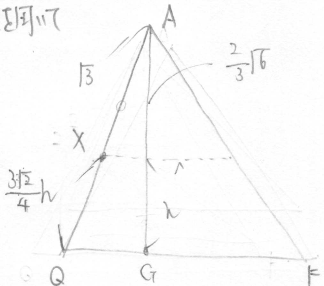


(1) Hの高さは四面体の高さの$\frac{1}{2}$である。面QRSの重心Gとして、

従って、

$$h_0 = \frac{1}{2}PG \quad \cdots ☆$$

であり、△PQGにピタゴラスを用いて

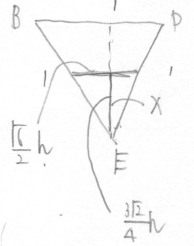


$$2^2 = PG^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$\therefore PG = \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{6}$$

だから☆に代入

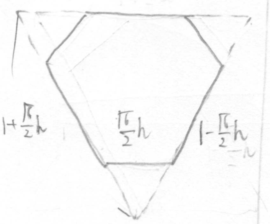
$$h_0 = \frac{1}{3}\sqrt{6}$$



(2) 水面の高さhの時の水面積Sとすると

$$1 = S\frac{dh}{dt} \quad \cdots ①$$

又底面からの高さhにおける正八面体の切り口は右図 だから



$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{\sqrt{6}}{2}h\right)^2 - 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\sqrt{6}}{2}h\right)^2$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{6}{4}h^2+\sqrt{6}h+1\right) - \frac{3\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{6}{4}h^2$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left[-3h^2+\sqrt{6}h+1\right]$$

①に代入してセイリ

$$dt = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(-3h^2+\sqrt{6}h+1\right)dh$$

両辺積分して

$$t = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(-h^3+\frac{\sqrt{6}}{2}h^2+h\right)+C \quad \cdots ②$$

②と、t=0でh=0からC=0であるから、高さhになるのに要する時間は

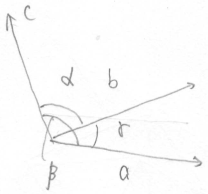
$$t = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(-h^3+\frac{\sqrt{6}}{2}h^2+h\right)$$

/20

第 3 問

[解] 題意から

$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix}\cos\gamma\\\sin\gamma\\0\end{pmatrix}$ $\vec{c}=\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix}$



とおける. ($p^2+q^2+r^2=1$ …①). さらに

この時題意から

$$\cos\alpha=\vec{b}\cdot\vec{c}=p\cos\gamma+q\sin\gamma \quad \cdots②$$

$$\cos\beta=\vec{a}\cdot\vec{c}=p \quad \cdots③$$

したがって. $A=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ とおくと.

$$A=(p\cos\gamma+q\sin\gamma)^2+p^2+\cos^2\gamma-2(p\cos\gamma+q\sin\gamma)p\cos\gamma \ (\because ②③)$$

$$=(p\cos\gamma+q\sin\gamma)(q\sin\gamma-p\cos\gamma)+p^2+\cos^2\gamma$$

$$=q^2\sin^2\gamma-p^2\cos^2\gamma+p^2+\cos^2\gamma$$

$$=(p^2+q^2)\sin^2\gamma+\cos^2\gamma$$

だから. ①から

$$0\leqq A\leqq(p^2+q^2+r^2)\sin^2\gamma+\cos^2\gamma=\sin^2\gamma+\cos^2\gamma=1 \quad \cdots④$$

//

左側の等号が成立するのは. Aの表式から $(p^2+q^2)\sin^2\gamma=0 \wedge \cos^2\gamma=0$ の時で. $\sin^2\gamma=0 \wedge \cos^2\gamma=0$ となることはないから. $\cos\gamma$, p, q が全て0の時. この時. $\vec{a}\perp\vec{b}\perp\vec{c}$ である.

//

右側の等号が成立するのは. ④の等号成立時. つまり $r^2=0 \Leftrightarrow r=0$ の時で. この時. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は同一平面上にある

//

$\cos^2\gamma=\frac{1+\cos2\gamma}{2}$

$2pq\cos\gamma(\sin\gamma-\cos^2\gamma)$

$2pq(\sin2\gamma-1-\cos2\gamma)$

$-2q(1-s^2)$

$+2qs^2-2q$

/20

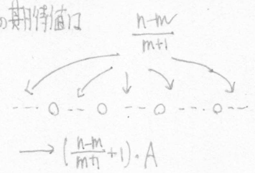
第 5 問

▷ いわゆる"最小値の平均"というパターンである。

nコから、mコをえらび、小さい方からk番目のものの期待値は

$$E = A\frac{n+1}{m+1}$$

である



$A=1$, mについての証明は容易。対称性から$E(1)=n+1-E(m)$となることに注意して、

$$E(m)=\sum_{k=m}^{n} k\cdot\frac{{}_{k-1}C_{m-1}}{{}_{n}C_{m}}$$

$$=\frac{1}{{}_{n}C_{m}}\sum_{k=m}^{n} m\cdot{}_{k}C_{m} \qquad \left(\because\ {}_{n}C_{r}=\frac{n}{r}\,{}_{n-1}C_{r-1}\right)$$

$$=\frac{m}{{}_{n}C_{m}}\,{}_{n+1}C_{m+1} \qquad \left(\because\ \sum_{k=r}^{n} k\cdot{}_{k}C_{r}={}_{n+1}C_{r+1}\right)$$

$$=\frac{m(n+1)}{m+1} \quad /\!/$$

より

$$E(1)=\frac{n+1}{m+1} \quad /\!/$$

他の場合は、

▷ あとは、対称性から(X_1, Y_1)と(X_2, Y_2)が等価であることに気付けば容易にわかる。

- $r\,{}_{n}C_{r} = n\,{}_{n-1}C_{r-1}$
- $\sum_{k=m}^{n} {}_{k}C_{m}\cdot k = {}_{n+1}C_{m+1}$

第 5 問

[解] $n \geq 4$ …①

(1) ○ ◎$_{X_2}$ …◎$_{X_1}$… ○ ◎$_{Y_1}$ … ◎$_{Y_2}$ ○

先に (X_1, Y_1) をえらんでも, (X_2, Y_2) をえらんでも良いので, これらは対称である。…※

(1) 期待値の和公式から $E(X_1+Y_1) = E(X_1)+E(Y_1)$ …① である。

$$E(X_1) = \sum_{k=2}^{n} k \cdot \frac{{}_{k-1}C_1}{{}_nC_2}$$

$$= \frac{1}{{}_nC_2}\sum_{k=2}^{n} {}_kC_2 \cdot 2 \qquad \left(\because {}_nC_r = \frac{n}{r}\,{}_{n-1}C_{r-1}\right)$$

$$= \frac{4}{n(n-1)}\,{}_{n+1}C_3 \qquad \left(\because \sum_{k=r}^{n} {}_kC_r = {}_{n+1}C_{r+1}\right)$$

$$= \frac{2}{3}(n+1) \quad \cdots ②$$

$Y_1 = k$ なる確率と, $X_1 = n+1-k$ なる確率は明らかに等しいから,

$$E(Y_1) = n+1 - E(X_1) = \frac{1}{3}(n+1) \quad \cdots ③$$

①,③より

$$E(X_1+Y_1) = n+1$$ //

(2) ②から $E(X_1) = \frac{2}{3}(n+1)$ //

(3) ③, ※から $E(Y_2) = E(Y_1) = \frac{1}{3}(n+1)$ //

[注]

(1)だけなら $E(X_1+Y_1)$ は ${}_nC_2$ 通り全てについての和だから, 各数字は $n-1$ 回現れるので,

$$E(X_1+Y_1) = \frac{1}{{}_nC_2}\sum_{k=1}^{n} k(n-1) = n+1$$

と出るが, (2), (3) をかんがえると…ね。

1, 2, 3, 4

$\frac{2}{5}$ $\frac{4(n+1)}{2}$

$k \cdot {}_{k-1}C_3$ $E(R_1+Q+S+R)$

4.

n+1コの中から5つえらぶ

maxをn+1として ${}_nC_4$

$({}_4C_4 + {}_5C_4 + \cdots + {}_nC_4)$

${}_{n+1}C_5$

○○○ ○ ○ ○ k

$k(k-1)$

$(k-1)(k(k-1)-$

$(n-k+1)$

$f(k+1)\ f(k)$

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)\cdot \cancel{4}^{2}}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \quad \frac{\cancel{n}(n+1)}{\cancel{2}}$$

第 6 問

[解]

(1) $f(x) = e^x - e^a - (x-a)e^a$ とおく. $f'(x) = e^x - e^a$ から, 増表を考える

x		a	
f'	$-$		$+$
f	↘		↗

よって $f(x) \geq f(a) = 0 \iff e^x \geq e^a + (x-a)e^a$ 図

(2) (1)で $x = \sin \pi x$ として, $[0,1]$ で積分する.

$$\int_0^1 e^{\sin \pi x} dx \geq \int_0^1 e^a(\sin \pi x + (1-a))\, dx \quad \left(\frac{3}{2} - a\right)$$

$$= e^a \left[-\frac{1}{\pi}\cos \pi x + (1-a)x \right]_0^1$$

$$= e^a \left[-\frac{1}{\pi}(-1-1) + 1 - a \right]$$

$$= e^a \left(\frac{2}{\pi} + 1 - a \right)$$

a は任意だから, $a = 2/\pi$ として代入

$$\int_0^1 e^{\sin \pi a} dx \geq e^{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{2}{\pi} + 1 - \frac{2}{\pi}\right) = e^{\frac{2}{\pi}}$$

#

$e^{\sin \pi x} \geq e^a + (\sin \pi$

$1 + x - a$

$\frac{3}{2} - \frac{2}{\pi} \geq 1$

$\frac{1}{2} + 1 - a$

$\frac{1}{2} \geq \frac{2}{\pi}$

$\frac{3}{2} - a$

$\frac{1}{4} \leqq \frac{1}{\pi}$

$e^a\left(\frac{3}{2} - a\right) \geq e^{\frac{2}{\pi}}$

e^a

第 7 問

$f(x)$ は x に関する n 次の整式とする $(n \geqq 0)$

(1) 2変数 x・y の整式として

$$f(x+y) = p_0(x) + p_1(x)y + \cdots + p_n(x) \cdot y^n$$

と書き表す. ただし, $p_i(x)$ $(i = 0, 1, \cdots n)$ は x に関する整式である. この時

$$p_0(x) = f(x), \quad p_1(x) = f'(x), \quad p_2(x) = \frac{1}{2}f''(x)$$

かつ, $p_n(x) =$「$f(x)$ において x^n の係数」であることを示せ.

(2) ある定数 c があって,

$$f(x+y) - f(x) = y f'(x+yc)$$

が成立すれば, $n \leqq 2$ であることを示せ.

$a_n y^n$ $\quad {}_nC_{n-1} a_n^{n-1}$

$y\left((cy+x)^n\right)'$

$cny \cdot (cy+x)^{n-1}$

$c^n \cdot n \cdot y^n$

$$y f'(x+yc) = f'(x) \cdot y + \frac{1}{2}f''(x) \cdot y^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{n}(x)$$

$$f'(x+cy) = f'(x) + f''(x)(cy) + \frac{1}{2}f'''(cy)^2 + \cdots$$

第 7 問

[解](1) $f(x+y)=\sum_{k=0}^{n} P_k(x)\cdot y^k$ ……① とする。$y=0$として

$$f(x)=P_0(x)$$ 圀

①をyで微分して. $n\geqq1$の時

$$f'(x+y)=\sum_{k=1}^{n} k\cdot P_k(x)\cdot y^{k-1} \quad \cdots②$$

$y=0$として

$$f'(x)=P_1(x) \quad (n=1\text{の時}.\ f'(x)=P_1(x)=0\text{で良い})$$ 圀

②の両辺yで微分して, $n\geqq2$の時.

$$f''(x+y)=\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\cdot P_k(x)\cdot y^{k-2}$$

$y=0$として.

$$f''(x)=2P_2(x) \quad (n=0,1\text{の時},\ f''(x)=P_2(x)=0\text{で良い})$$ 圀

これをくり返して.

$$f^{(n)}(x+y)=n(n-1)\cdots2\cdot1\cdot P_n(x)$$

$f(x)$のn次の係数a_nとすると.

$$n!\cdot a_n=n!\cdot P_n(x) \qquad \therefore\ P_n(x)=a_n$$ 圀

(2) (1)から, 帰納的に$f^{(k)}(x)=k!P_k(x)$ $(k=0,1,\cdots n)$だから $n\geqq3$とすると.

。$f(x+y)-f(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{k}(x)}{k!}y^k$ ……③

。$yf'(x+yc)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{k+1}(x)}{k!}\cdot(cy)^k\cdot y$ ……④

だから. y^2, y^3の項で係数比較して.

。$\frac{f''(x)}{2}=\frac{f''(x)}{1}\cdot c$

。$\frac{f'''(x)}{6}=\frac{f'''(x)}{4}\cdot c^2$

$n\geqq3$から. $f''(x)\neq0$, $f'''(x)\neq0$だから.

$$c=\frac{1}{2}=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

となって矛盾。よって $n\leqq2$である。圀

第 8 問

整数係数3次多項式が次の条件 (*) をみたす。

(*) 任意の自然数 n に対し、$f(n)$ は $n(n+1)(n+2)$ で割り切れる。

この時、$a \in \mathbb{Z}$ があって、$f(x) = ax(x+1)(x+2)$ とかけることを示せ。

第 8 問

[解] $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$として.

$$f(x) = ax(x+1)(x+2) + bx(x+1) + cx + d$$

とおける。

$$f(n) = n[a(n+1)(n+2) + b(n+1) + c] + d$$

が $n(n+1)(n+2)$ でわり切れることから. dが任意の自然数でわり切れるので. $d=0$である。

この時.

$$f(n) = n[(n+1)\{a(n+2)+b\}+c]$$

が $(n+1)\cdot n$ でわり切れることから. $n \perp n+1$に注意して. cが任意の2以上の自然数でわり切れるので. $c=0$である。

この時

$$f(n) = an(n+1)(n+2) + bn(n+1)$$

から同様に $b=0$となり.

$$f(x) = a(x+2)(x+1)x$$

である. ∎

[解2] $b, c, d \in \mathbb{Z}$として.

$$f(x) = ax(x+1)(x+2) + bx^2 + cx + d$$

とできる。題意から. 任意のnに対し.

"$bn^2 + cn + d$ が $n(n+1)(n+2)$ でわり切れる"

が成立するので.

$$\frac{bn^2+cn+d}{n(n+1)(n+2)} \in \mathbb{Z}$$

である。$b=c=d=0$ でない時. nを十分大きくすれば

$$0 < \left| \frac{bn^2+cn+d}{n(n+1)(n+2)} \right| < 1$$

となるから不適。よって $b=c=d=0$である(以下略)

$4b+c$ が 6で ok

$10b+2c$ が 6で

$2b+c+12b+3c$

$-12b-4c$

$\underbrace{(4b+c)}_{= 6} + 6m$

$\cancel{2}b = \cancel{6}b'$ 3

$6m$ =

$c = 6c'$

$c+d \equiv 0 \quad (6)$

$6b+2c+d \equiv 0 \quad (24)$

$18b' + c + 6m \equiv 0 \quad (24)$

$3b' +$

$b = 3b'$

$\cancel{36}$

$\cancel{b} = 6c'$

$d = 6c'$

$3b' + 2c' + d' \equiv 0 \pmod 4$

$2b' + 3c' + d' \equiv 0 \pmod{10}$