

第 1 問

[解] $f(x) = x^4 - 6x^2$ とおく. $f(x) = 4x^2 - 12a$ から, $x = \pm 1$ に対する接線は

$$l: y = (4t^3 - 12t)x - 3t^4 + 6t^2$$

である. (a, b) を通る時

$$0 = b + 3t^4 - 4at^3 + 6t^2 + 12at \equiv g(t) \quad \text{--- ①}$$

である. $f(x)$ のグラフの概形は右図で,

$x = \pm 1$ でのみ接線が一致する. $\star$ から, 境界をみ下す時, t の 4 次方程式

①が $t = \pm 1$ に 4 実数解を持つ. $\star$

($\star$ の 4 次式). $\downarrow$ x の条件を調べる.

$$g'(t) = 12t^3 - 12at^2 - 12t + 12a$$

$$= 12(t^3 - at^2 - t + a)$$

$$= 12(t-a)(t+1)(t-1)$$

す. a による下表をえる

⑦ $a < -1$

t	a	-1	1	
g'	$-$	0	$+$	0
g	$\searrow$	$\swarrow$	$\searrow$	$\swarrow$

⑧ $-1 < a < 1$

t	-1	a	1	
g'	$-$	0	$+$	0
g	$\searrow$	$\swarrow$	$\searrow$	$\swarrow$

⑨ $a < 1$

t	-1	1	a	
g'	$-$	0	$+$	0
g	$\searrow$	$\swarrow$	$\searrow$	$\swarrow$

⑩ $a = \pm 1$ の時

不適

す. $t = \pm 1$ に 4 実数解を持つ条件は

$$\begin{cases} \text{⑦の時. } f(a) < 0, f(-1) > 0, f(1) < 0 \\ \text{⑧の時. } f(-1), f(1) < 0, f(a) > 0 \\ \text{⑨の時. } f(-1), f(a) < 0, f(1) > 0 \end{cases} \quad \text{--- ②}$$

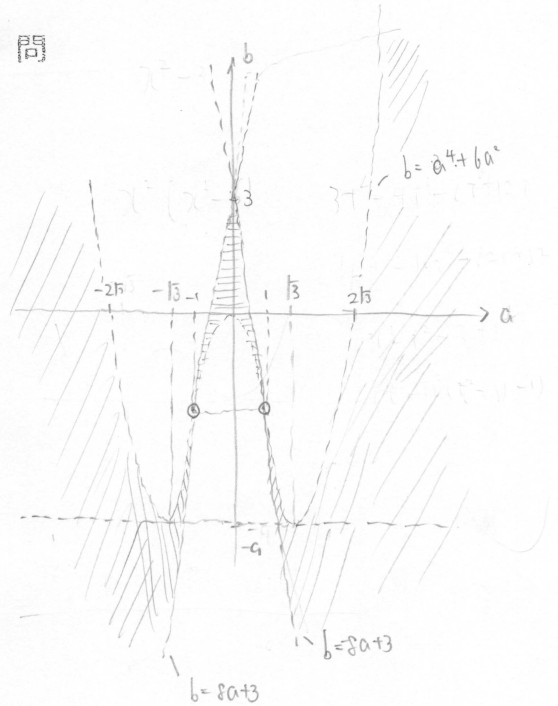
$$(f(a) = -a^4 - 6a^2 + b, f(1) = 8a - 3 + b, f(-1) = -8a - 3 + b)$$

又, $t = \pm 1$ に解を持つため, $b \neq -9$ --- ③

②③を図示. 右図斜線部 ($b = -9$, 境界部を除く)

$$12x^2 - 12$$

$$x = \pm 1$$



(1) $x = \pm 1$ に 4 実数解を持つ条件は $f(a) < 0, f(-1) > 0, f(1) < 0$ である. $f(a) = -a^4 - 6a^2 + b, f(-1) = -8a - 3 + b, f(1) = 8a - 3 + b$ である. $f(a) < 0 \iff b < a^4 + 6a^2$ である. $f(-1) > 0 \iff b > 8a + 3$ である. $f(1) < 0 \iff b < -8a + 3$ である. $b \neq -9$ である. $b = -9$ のときは, $f(a) = -a^4 - 6a^2 - 9 < 0$ である. $f(-1) = -8(-9) - 3 + (-9) = 72 - 3 - 9 = 60 > 0$ である. $f(1) = 8(-9) - 3 + (-9) = -72 - 3 - 9 = -84 < 0$ である. $b = -9$ のときは, 条件を満たす. $b = -9$ のときは, 条件を満たす. $b = -9$ のときは, 条件を満たす.

第 2 問

[解] $f(x) = \frac{a-cx}{x^2}$, $f'(x) = \frac{x \sin x - 2(a-cx)}{x^3}$ の符号は

$0 < x \leq \pi/2$ の時、分子の符号は $x \leq 1$ と $x > 1$ の場合、 $g(x)$ とおくと

$$g(x) = x \sin x - 2(a-cx)$$

$$g'(x) = \sin x + x \cos x - 2 \sin x$$

$$g'(x) = -x \sin x < 0 \quad (0 < x \leq \pi/2)$$

よって $g(x)$ は区間内で単調減少で、かつ $g(0) = 0$ から、区間内で

$g'(x) < 0$ かつ $g(x)$ は単調減少。 -- *

一方、「区間内で $f(x)$ が増加関数」 $\Leftrightarrow$ 「区間内で $g(x) \geq 0$ 」だから

①を満たす a を探せばいい。だから

$$g(x) \geq g(\pi/2) = \frac{\pi}{2} - 2a \geq 0 \Leftrightarrow a \leq \pi/4$$

だから① $\Leftrightarrow a \leq \pi/4$ なる a がある最大値は $a = \pi/4$ である。

② $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \sin x - 2(a-cx) \geq 0$

$$g(x) \geq 0$$

$$-2(a-1) \geq 0$$

$$x \sin x - 2(a-cx) \geq 0$$

$$c - c - 2a$$

$$a \leq 1$$

$$x \sin x - 2a$$

$$c - c - 2a$$

$$a \leq 1$$

$$g(x) \quad a = 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} - 2a$$

$$\frac{x^2}{2} = \frac{1-c}{x^2}$$

$$\frac{\pi}{4} - c$$

$$x^4$$

$$1-c$$

$$\frac{\pi}{2} - 2a > 0$$

$$-2 + 2c$$

$$f(x) = x \sin x - 2(1-c) \geq 0$$

$$f'(x) = \sin x + x \cos x - 2 \sin x$$

$$x \cos x - \sin x < 0$$

$$f''(x) = \cos x - \sin x < 0$$

第 問

$$\frac{du}{dt} = v$$

$$\frac{d}{dt}(u+v) = v+u, \quad \frac{d}{dt}(u-v) = v-u$$

$$\therefore u+v = c_1 e^t$$

$$u-v = c_2 e^{-t}$$

第 3 問

[解] Pの接線は $l: y = \frac{1}{s}(x-s) + \log s = \frac{1}{s}x + \log s - 1 \equiv f_s(x)$ である。

Q (0, $\log s - 1$) である。

$$PQ = \sqrt{s^2 + 1}$$

7. 又、

$$AP = \int_0^s \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx$$

7. 又、

$$t = \sqrt{s^2 + 1} - \int_0^s \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx \equiv g(s)$$

7. 又、

$$\frac{dt}{ds} = \frac{s}{\sqrt{s^2 + 1}} - \sqrt{1 + \frac{1}{s^2}} = \sqrt{1 + s^2} \cdot \frac{-1}{s(1 + s^2)} \quad (\because s \geq 1) \quad \dots ④$$

7. 又、

$$\frac{du}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{du}{ds} = -s\sqrt{s^2 + 1} \cdot \left(-\frac{1}{s^2}\right) = \sqrt{1 + u^2} \quad (\because (1)) \quad \dots ⑤$$

7. 又、

$$\frac{dv}{dt} = \frac{du}{dt} \frac{dv}{du} = \frac{u}{\sqrt{u^2 + 1}} \sqrt{u^2 + 1} = u \quad (\because (2)) \quad \dots ⑥$$

7. 又、

$$dt = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}} du$$

7. 又、

$$t = \log(u + \sqrt{1 + u^2}) + C \quad (\because u > 0) \quad \dots ⑦$$

7. 又、

$$\sqrt{2} = \log(\sqrt{2} + 1) + C$$

$$\therefore C = \sqrt{2} - \log(\sqrt{2} + 1)$$

7. 又、

$$e^{t-C} = u + \sqrt{1 + u^2}$$

$$e^{t-C} - u = \sqrt{1 + u^2} \quad \dots ⑧$$

7. 又、

$$e^{2(t-C)} - 2e^{t-C}u - 1 = 0$$

$$\therefore u = \frac{e^{2t-2C} - 1}{2e^{t-C}} \quad \dots ⑨$$

7. 又、

$$u = \frac{(3+2\sqrt{2})e^{-2\sqrt{2}} \cdot e^{2t} - 1}{2(\sqrt{2}+1) \cdot e^{\sqrt{2}} \cdot e^t}$$

$$= \frac{(1+\sqrt{2})e^{-2\sqrt{2}} e^{2t} - (-1+\sqrt{2})}{2e^{-\sqrt{2}} \cdot e^t}$$

$$= \frac{1}{2} \left[(1+\sqrt{2})e^{t-\sqrt{2}} - (-1+\sqrt{2})e^{\sqrt{2}-t} \right]$$

7. 又、

[別解]

$$\frac{du}{dt} = u, \frac{dv}{dt} = u \text{ の辺々足し引きして、}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(u+v) = u+v \\ \frac{d}{dt}(v-u) = -(v-u) \end{cases}$$

積分して、

$$u+v = C_1 e^t$$

$$v-u = C_2 e^{-t}$$

$s=1$ の時、 $t=\sqrt{2}$, $u=1$, $v=\sqrt{2}$ である。

$$\begin{cases} 1+\sqrt{2} = C_1 e^{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2}-1 = C_2 e^{-\sqrt{2}} \end{cases}$$

7. 又、

$$u = \frac{1}{2} \{ (u+v) - (v-u) \}$$

$$= \frac{1}{2} \{ (1+\sqrt{2})e^{t-\sqrt{2}} - (-1+\sqrt{2})e^{\sqrt{2}-t} \}$$

$$-3 \times 4$$

$$1+\sqrt{2}$$

$$(1-\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})$$

第 4 問

[附] 時刻 t の P, Q, R の座標は

$$P(1, 0, 0) \quad Q(2, t, 0) \quad R(2, 2, t) \quad (t \geq 0)$$

$$\text{よって} \quad \vec{PQ} = \begin{pmatrix} 2-t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{PR} = \begin{pmatrix} 2-t \\ 2 \\ t \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{cases} |\vec{PQ}|^2 = (2-t)^2 + t^2, & |\vec{PR}|^2 = (2-t)^2 + 4 + t^2 \\ \vec{PQ} \cdot \vec{PR} = (2-t)^2 + 2t \end{cases}$$

よって

$$S = \frac{1}{2} \left| \left\{ (2-t)^2 + t^2 \right\} \left\{ (2-t)^2 + 4 + t^2 \right\} - \left\{ (2-t)^2 + 2t \right\}^2 \right|$$

$$= \frac{1}{2} \left| \left\{ (2-t)^2 + t^2 \right\} \left\{ 2(2-t)^2 + 4t \right\} - \left\{ (2-t)^2 + 2t \right\}^2 \right|$$

$$A = (2-t)^2 \text{ とおく}$$

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{A^2 + 2t^2A + 4t^3 - 4t^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{3t^4 - 12t^3 + 28t^2 - 32t + 16}$$

$\sim$ = 関数とみる。 t は 0 から 2 まで増加するから、関数が $\max$ のとき

S が最大。よって $f(t)$ を最大にする t を求める

$$f'(t) = 12t^3 - 36t^2 + 56t - 32$$

$$= 4(3t^3 - 9t^2 + 14t - 8)$$

$$= 4(t-1)(3t^2 - 6t + 8)$$

$$= 4(t-1) \{ 3(t-1)^2 + 5 \}$$

から下表を得る

t	0	1	
f'		-	+
f		↘	↗

よって $t=1$ で S は $\max$ となる

$$\vec{QP} = \begin{pmatrix} t-2 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{QR} = \begin{pmatrix} 2 \\ t-2 \\ t \end{pmatrix}$$

$$(2-t)^2 + 4t$$

$$t^2 + 4 - 4t$$

$$24 - 36t + 32 - 8$$

$$-17$$

$$(A+t^2)(A+t^2+4) - (A+2t)^2$$

$$= A^2 + (2t^2+4)A + t^4 + 4t^2 - (A^2 + 4tA + 4t^2)$$

$$= 2t^2 - 4t + 4t^2 + t^4$$

2

$$(2t^2 - 4t + 4)A + t^4$$

$$(2t^2 - 4t + 4)(t^2 - 4t + 4) + t^4$$

$$2t^4 - 8t^3 + 8t^2 - 4t^3 + 16t^2 - 16t + 4t^4 - 8t^3 + 16$$

第 5 問

第 問

第 6 問

[解] (1) $\chi = \sum_{i=1}^l \chi_i$

(2) $P(\chi_i=1) = \frac{1}{n}$ である。(1)から

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^l \chi_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq l} \chi_i \chi_j$$

より

$$E(\chi_i^2) = \frac{1}{n}, \quad E(\chi_i \chi_j) = E(\chi_i) E(\chi_j) = \frac{1}{n^2} \quad (\because \chi_i, \chi_j \text{ 独立})$$

だから

$$E(\chi^2) = \frac{l}{n} + 2 \frac{l(l-1)}{n^2}$$

$$= \frac{l^2 + l - l}{n} = \frac{l^2}{n}$$

(3) $E(\chi^2) > 2 \Leftrightarrow \frac{l^2}{n} > 2$

$$\Leftrightarrow l^2 + (n-1)l - 2n^2 > 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

である。まず $f(n) = l^2 + (n-1)l - 2n^2$ とおくと $D = 9n^2 - 2n + 1$

$$f(n) > 0 \Leftrightarrow n < \frac{-(n-1) - \sqrt{D}}{2}, \frac{-(n-1) + \sqrt{D}}{2} < n$$

だから $\textcircled{1}$ を満たす $\min l \in \mathbb{N}$ は $\dots < 0$ に注意して

$$\frac{-(n-1) + \sqrt{D}}{2} \leq l$$

を満たす $\min$ の整数である。ここで $n \in \mathbb{N}$ から

$$9n^2 - 6n + 1 < 9n^2 - 2n + 1 < 9n^2$$

だから、各 n 以上から

$$(3n-1)^2 < D < 3n$$

より、

$$-n < \frac{-(n-1) + \sqrt{D}}{2} < n + \frac{1}{2}$$

だから、 f を満たす $\min l = \frac{n+1}{2}$ である。

(93)

(94)

$$\frac{1}{n} z^{-1}$$

$$\frac{1}{n} z^{-1}$$

証明

$$\chi^2 \text{ の期待値 } = n C_X \left(\frac{1}{n} \right)$$

$$\sum_{\chi=1}^l \chi^2 n C_X \left(\frac{1}{n} \right) \cdot \left(\frac{n-1}{n} \right)^{n-\chi}$$

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad n \quad n+1$$

$$n l + l^2 - l$$

$$\frac{1}{2} n(n-1)$$

$$(n-1)^2 < (9n^2 - 2n + 1) < (3n)^2$$

$$9n^2 - 6n + 1 <$$

$$2 n l +$$

$f(x)$ は 全ての 実数 x で 定義 された 関数 で、 $f'(x) > 0$ を 満たす。 $a \in \mathbb{R}$ を 固定 して、

新たな関数 $g(x)$ を

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} & (x \neq a) \\ f'(a) & (x = a) \end{cases}$$

と 定義 する。この時 $g(x) > 0$ を 示 せ。

第 7 問

[解] $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} f'(a)$ から、 $g(x)$ は $x=0$ で連続であり、他の区間では明らかに連続だから、 $g(x)$ は全区間で連続である。平均値の定理より、 $x \neq a$ の時

$$g'(x) = \frac{f'(x)(x-a) - [f(x) - f(a)]}{(x-a)^2} \\ = \frac{f'(x) - f'(a)}{x-a} \quad (x \neq a \text{ の時})$$

なる α がある。又、 $f'(a) > 0$ から $f(x)$ は単調増加である。

・ $x > a$ の時、

$$g'(x) > \frac{f'(a) - f'(a)}{x-a} = 0$$

・ $x < a$ の時、

$$g'(x) = \frac{f'(a) - f'(x)}{a-x} > \frac{f'(a) - f'(a)}{a-x} = 0$$

から、いずれの時も $g'(x) > 0$ である。したがって示した図



$x=a$

第 8 問

n を奇数とし、 $f(k) = \left| \sin \frac{2\pi k}{n} \right|$ とする。

(1) 集合 $\{f(k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ の要素の数は?

(2) $m, n \in \mathbb{N}$ は互いに素な整数とする。

集合 $\{f(mk) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ なるものを

は m に依存しないことを示す。

$$m \cdot C + mD =$$

A B
 $m \cdot 0, m \cdot 1, \dots, m \cdot l, m \cdot (l+1), \dots, m \cdot (2l)$
 あり $0 \sim 2l$ まで出さ
 $\rightarrow$ 2つ A, B あり $d + \beta = 2l$ なる
 $2 \times$

$m \cdot 1, m \cdot 2, \dots, m \cdot l$ なる
 $2 \times$

$$\sin \frac{m \cdot 1}{n} 2\pi$$

$$\sin \frac{m \cdot 2}{n} 2\pi$$

$$\vdots$$

$$\sin \frac{m \cdot l}{n} 2\pi$$

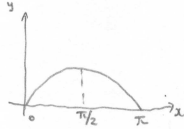
第 8 問

[解] (1) $n=2l+1$ ($l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) とおく。 $\sin x$ が周期 2π の周期関数であるから、 $k=0, \dots, n-1$ として示せばよい。

$$\left| \sin \frac{2\pi(n+k)}{n} \right| = \left| \sin \frac{2\pi k}{n} \right|$$

だから、さらに $k=0, 1, \dots, l$ として示せばよい。 $\sin x$ のグラフは

$$\frac{2\pi a}{n} + \frac{2\pi b}{n} = \pi \Leftrightarrow 2(a+b) = n \quad \text{と} \quad a, b \ (a, b=0, 1, \dots, l)$$



がよいことから、 $\left| \sin \frac{2\pi a}{n} \right|, \left| \sin \frac{4\pi a}{n} \right|, \dots, \left| \sin \frac{2\pi l a}{n} \right|$ は全て異なる

$$\text{の} \quad l+1 = \frac{n+1}{2} \quad \square$$

(2) $k=0, 1, \dots, l$ とする。題意の集合 D_n が、 m にあらず集合 $D_1: \left\{ \left| \sin \frac{k \cdot 2\pi}{n} \right| \mid k=0, 1, \dots, l \right\}$ に一致することを示す。まず、 $m \neq n$ かつ

$$m=0, m=1, \dots, m=l, m(l+1), \dots, m(2l)$$

と $n(=2l+1)$ でわったあとの集合は、 $\{1, 2, \dots, 2l\}$ に一致する。よって、 $\{m=1, \dots, m=l\}$ の中で、

m, j のあつり α, β が、 $\alpha + \beta \neq n$ であることを示す。証明は背理法による。(i) $\alpha + \beta = n$ と仮定すると、 $m+1+m$ が n で割り切れるが、 $m \nmid n$ かつ $1 \leq m \leq 2l$ から、これは矛盾。よって示すことが

したがって、 $\{m=1, m=2, \dots, m=l\}$ と n でわったあつりは、以下の 2 数 $(p, n-p)$ の組のうちからとらえかたをすとしていた集合 $(=A \text{ とおく})$ に一致する。(右図)

この時、 $\left| \sin \frac{2\pi p}{n} \right| = \left| \sin \frac{2\pi(n-p)}{n} \right|$ だから、たとえば

$$\left\{ \left| \sin \frac{2\pi k p}{n} \right| \mid k=1, 2, \dots, l \right\} = \left\{ \left| \sin \frac{2\pi k}{n} \right| \mid k=1, 2, \dots, l \right\}$$

となる。① 又、 m にあらず $k=0$ の場合は $\left| \sin \frac{2\pi \cdot 0}{n} \right| = 0$ と (3)。

以上①②から、 $D_m = D_1$ である。□

$$2\pi(m-1)$$

$$\frac{2\pi a}{n} + \frac{2\pi b}{n} = \pi$$

$$\frac{2(a+b)}{2m+1} =$$

$$(0, 2l)$$

$(1, 2l)$	$\rightarrow 1_1$
$(2, 2l-1)$	$\rightarrow 1_2$
$\vdots$	$\vdots$
$(l, l+1)$	$\rightarrow 1_l$