

第 1 問

[解] $a, b \in \text{odd}$

(1) $a = a'd, b = b'd$ ($a', b' \in \mathbb{N}$, 互いに素) とおけるから代入して

$$m = d(11a' + b')$$

$$n = d(3a' + b')$$

以下, $A = 11a' + b', B = 3a' + b'$ の最大公約数を求める

$$(A, B) = (8a', 3a' + b')$$

つまり, a', b' が互いに素だから, $(a', 3a' + b') = 1$ から, (A, B) は 8 の約数である. 1, 2, 4, 8 のいずれかである. 一方, $3a' + b' \in \text{偶数}$

より, (A, B) は 偶数でもあるので

$$(A, B) = 2, 4, 8$$

だから

$$(m, n) = 2d, 4d, 8d$$

(2) m, n が共に平方数だと仮定する. つまり $m = A^2, n = B^2$

$(A, B \in \mathbb{N})$ とおく. すると

$$A = \frac{m-n}{8}, b = \frac{11n-3m}{8}$$

だから代入して

$$a = \frac{(A+B)(A-B)}{8}$$

$A+B, A-B$ の偶奇が一致すること. $a \in \text{odd}$ から $p, q \in \text{odd}$ だと

$$(A+B, A-B) = \frac{(4p, 2q)}{1} \text{ or } \frac{(2p, 4q)}{2}$$

となる

1° の時

$$(A, B) = (2p+q, 2p-q) \text{ とおける. } b \text{ を代入}$$

$$b = \frac{1}{8} [11(2p-q)^2 - 3(2p+q)^2]$$

$$= \frac{1}{8} [8 \cdot 4p^2 - 14 \cdot 4pq + 8q^2]$$

$$= 4p^2 - 7pq + q^2 \in \text{偶数}$$

($\because p, q \in \text{odd}$) ならば, $b \in \text{odd}$ に矛盾

2° の時

$$(A, B) = (p+2q, p-2q) \text{ とおける. } b \text{ を代入}$$

$$b = \frac{1}{8} [11(p-2q)^2 - 3(p+2q)^2]$$

$$= \frac{1}{8} [8 \cdot p^4 - 14 \cdot 4pq + 8 \cdot 4q^2]$$

$$= p^4 - 7pq + 4q^2 \in \text{偶数}$$

から $b \in \text{odd}$ に矛盾.

以上から示された図

第2問

★1件計算は、極力ラクな方法を探すこと!

① 球関連

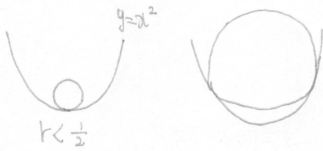
②

→ [円と放物線の接点の計算]

① 円の中心と放物線上的点の距離が min のとき半径

② 放物線上に円がある

③ 2パターンある!!



第 2 問

[解] 立体を、 xy 平面で切断する ($r > \frac{1}{2}$ に注意)と

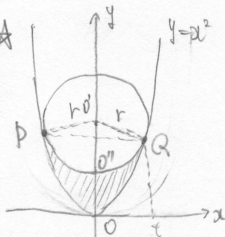
対称性より図は右のようになる。★

2 接点 P, Q 与 $Q(t, t^2) (t > 0)$,

球の中心 $O'(0, Y)$ とおくと

$$|\overline{O'Q}|^2 = r^2$$

$$|\vec{OQ} \perp \vec{e}| \quad (\text{直交} Q \text{ の } y = x^2 \text{ の接線})$$



$$\begin{cases} t^2 + (t^2 - \gamma)^2 = r^2 \\ \begin{pmatrix} t \\ t^2 - \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2 + (t^2 - 1)^2 = r^2 & \text{--- ①} \\ 1 + 2(t^2 - 1) = 0 & \text{--- ②} \end{cases} \quad (\because t > 0)$$

②から $t^2 - 1 = -\frac{1}{2} t$ から, $S = t^2 \geq 17$. ①から $t \geq 4$

$$t^2 + \frac{1}{4} = r^2$$

↑70から

$$t = \sqrt{r^2 - 1/4}, \quad Y = r^2 + 1/4$$

よめる積は図の斜線部の面積を陣由図に回転させた

立体の体積 V にひいて:

$$\nabla = (\nabla_{PQR} \text{ 在 } y \text{ 轴方向, 回転矢/体積 } V_i)$$

$$- (\nabla \cdot \mathbf{Q}) \mathbf{Q}^T \mathbf{E}'' \quad \tau_2) \quad (3)$$

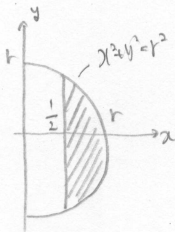
てあり、対称性から、

$$|V_1 = \int_0^t 2\pi x \cdot x^2 dx = \frac{1}{2}\pi t^4 = \frac{1}{2}\pi (t^2/4)^2$$

$$V_2 = \int_{\frac{1}{2}}^r \pi(r^2 - x^2) dx$$

$$= \pi \left[r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{\frac{1}{2}}^r$$

$$= \pi \left(\frac{2}{3} r^3 - \frac{1}{2} r^2 + \frac{1}{24} \right)$$



だから ③に代入して

$$V = \frac{\pi}{4} \left[\frac{1}{2} r^4 - \frac{2}{3} r^3 + \frac{1}{4} r^2 - \frac{1}{96} \right]$$

★ について、時間 t に x があはば、 $x^2 + (y-r)^2 = r^2$ が
が不変力にて言た方がおかしいかも知れない、すぐ言えり

第 3 問

[解] Bが第一象限にあるとして

一般性を失わない。

$B(x, y)$ ($x, y > 0$) とし、

Bからx軸に下した垂足

Mとする

$$AB: y = \frac{y}{x+1}(x+1)$$

∴ $D(0, \frac{y}{x+1})$ であり、 $DB = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow DB^2 = 12$ ($\because DB > 0$)

から

$$12 = x^2 + (y - \frac{y}{x+1})^2$$

$$\therefore y = \frac{x+1}{x} \sqrt{12-x^2} \quad (0 < x \leq 2\sqrt{3})$$

である ($\because y, x > 0$)。このとき、 H と $\triangle ABC$ の共通部の面積

$S(x)$ とし

$$\begin{aligned} S(x) &= 2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x+1} + y \right) \cdot x \\ &= \frac{x(x+2)}{x+1} \cdot \frac{x+1}{x} \sqrt{12-x^2} \\ &= (x+2) \sqrt{12-x^2} \\ &= \sqrt{(x+2)^2 (12-x^2)} \equiv f(x) \end{aligned}$$

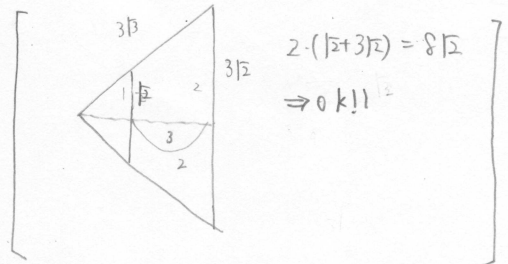
$f(x)$ が最大のとき、 $S(x)$ も最大 ($\because y = f(x)$ は x の増加関数) である。

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x+2)(12-x^2) + (-2x)(x+2)^2 \\ &= 2(-2x^3 - 6x^2 + 8x + 24) \\ &= 4(-x^3 - 3x^2 + 4x + 12) \\ &= -4(x-2)(x+3)(x+2) \end{aligned}$$

∴, 下表を作る

x	0		2		$2\sqrt{3}$
f'		+	0	-	
f		↗		↘	

$$\therefore \max S(x) = S(2) = 8\sqrt{2}$$



$$2 \cdot (12 + 3\sqrt{2}) = 8\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 0 < 1$$

$$x^2 + y^2 \left(\frac{x}{x+1} \right)^2 = 12$$

$$y^2 \cdot 0 = \frac{12-x^2}{x^2} (x+1)^2$$

$$4 \cdot 8$$

$$-x^3 - 2x^2 + 12x + 24$$

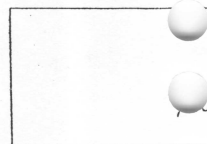
$$-x(x^2 + 4x + 4)$$

$$-4x^2$$

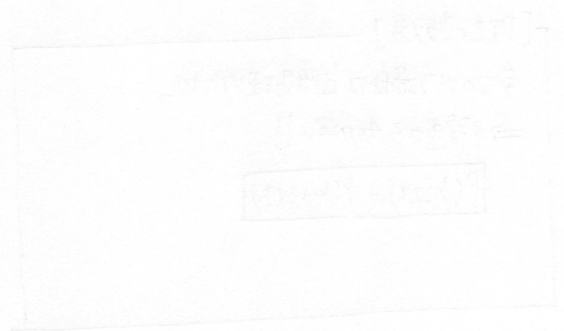
$$-4x$$

$$2\sqrt{2} \cdot 4$$

第二問



第 4 問



[独立の代入]

今日のお万場合は包除定理のキヤル

$\Rightarrow$ 階差から和が早い!!

$$P(k \leq X) - P(k-1 \leq X)$$

$n \rightarrow 1, n(n-1)$

第 5 問

[解] $n \geq 3 \dots ①$

A 君の得点が k 点となる確率 $P_A(k)$ は、

$$P_A(k) = \frac{k-1}{nC_2} = \frac{2k-2}{n(n-1)}$$

∴ B 君の得点が k 点となる確率 $P_B(k)$ は

$$P_B(k) = \frac{k^2 - (k-1)^2}{n^2} = \frac{2k-1}{n^2}$$

である。これらは互いに独立であることから、A 君が勝つ確率は

$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=2}^n P_A(k) \cdot \{B \text{ 君の得点が } k-1 \text{ 以下である確率}\} \\ &= \sum_{k=2}^n P_A(k) \cdot \sum_{i=1}^{k-1} P_B(i) \end{aligned} \quad \dots ①$$

∴ ①より

$$\sum_{i=1}^{k-1} P_B(i) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{k-1} (2i-1) = \frac{1}{n^2} [k(k-1) - (k-1)] = \frac{1}{n^2} (k-1)^2$$

たが ① に代入して

$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{nC_2} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot (k-1)^2 \\ &= \frac{2}{n^3(n-1)} \sum_{k=2}^n k^2 \\ &= \frac{2}{n^3(n-1)} \left[\frac{1}{2} n(n+1) \right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{n^3(n-1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} \end{aligned} \quad \dots ②$$

同点である確率は

$$1 = \sum_{k=1}^n P_A(k) \cdot P_B(k) = \frac{4n+1}{3n^2}$$

たが ② から $P+Q+1=1$ より

$$Q = 1 - \frac{n+1}{2n} - \frac{4n+1}{3n^2} = \frac{3n^2-5n-2}{6n^2} < P \quad \therefore P < Q$$

[注] (2) の証明

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{k=2}^n P_B(k) \cdot \sum_{i=1}^{k-1} P_A(i) \\ &= \sum_{k=2}^n P_B(k) \cdot \frac{1}{nC_2} \cdot \frac{1}{2} (k-1)(k-2) \\ &= \frac{1}{2 \cdot nC_2 \cdot n^2} \sum_{k=2}^n (2k-1)(k-1)(k-2) \end{aligned} \quad \dots ③$$

∴ ③より

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n k(k-1)(k-2) &= \frac{1}{4} (n+1)n(n-1)(n-2) \\ \sum_{k=2}^n (k-1)(k-2) &= \frac{1}{3} n(n-1)(n-2) \end{aligned}$$

③ に代入して

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{n^3(n-1)} \left[\frac{1}{2} (n+1)n(n-1)(n-2) - \frac{1}{3} n(n-1)(n-2) \right] \\ &= \frac{1}{n^3(n-1)} n(n-1)(n-2) \left(\frac{n+1}{2} - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{n-2}{n^2} \cdot \frac{3n+1}{6} = \frac{3n^2-5n-2}{6n^2} \end{aligned}$$

∴ 成立する。

$$\frac{N}{N} \cdot \frac{1}{N} = \frac{2}{N^2} \cdot N \cdot C_2$$

$$\frac{(N-1)(N-2)}{3N^5}$$

$$\frac{2}{3N^5}$$

$$\frac{NC_2 \cdot 2}{N^6}$$

$$N-3 \quad (6)$$

$$1 - \frac{3n(n-1) + 1n^2}{6n^2} = \frac{3n^2-5n-2}{6n^2}$$

$$6n^2 - 3n(n-1) - 2(4n+1) = 3n^2 - 5n - 2$$

$$3n^2 - 5n - 2$$

$$\frac{3n^2-5n-2}{6n^2} > \frac{n-1}{2n} = \frac{3n^2-3n}{6n^2}$$

第 6 問

[解] 帰納的に、 $f(n) \equiv 0$ と仮定する。 $g_n(n) = \frac{1}{f_n(n)}$ とする

すると

$$f_{n+1}(x) = \frac{a f_n(x)}{f_n(x)+1}$$

の両辺逆数をと

$$g_{n+1}(x) = \frac{1}{a} (1 + g_n(x))$$

$$\therefore g_1(x) = \frac{1}{f_1(x)} = \frac{x+1}{ax} \text{ と仮定}$$

$$1^\circ a=1 \text{ のとき } g_n(x) = g_1(x) + (n-1) = \frac{x+1}{ax} + (n-1)$$

$2^\circ 0 < a < 1$ のとき 等比数列の公式から

$$g_n(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^{n-1} \left(\frac{x+1}{ax} - \frac{1}{a-1} \right) + \frac{1}{a-1}$$

I).

$1^\circ a=1$ のとき

$$f_n(x) = \frac{ax}{(x+1) + a(n-1)x} = \frac{x}{nx+1}$$

$2^\circ 0 < a < 1$ のとき

$$f_n(x) = \frac{ax(a-1)}{\left(\frac{1}{a}\right)^{n-1} (-x+a-1) + ax}$$

(2) $a=1$ のとき.

$$b_n = n \text{ と仮定}$$

$$b_n f_n(c) = \frac{nc}{nc+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{nc}} \rightarrow 1 \text{ (} n \rightarrow \infty \text{)}$$

と仮定を証明する

$a \neq 1$ のとき

$$b_n = \left(\frac{1}{a}\right)^{n-1} \text{ と仮定 } |a| < 1 \text{ と仮定}$$

$$b_n f_n(c) = \frac{a(a-1) \cdot c}{(a-1-c) + ac \cdot a^{n-1}}$$

$$\rightarrow \frac{ac(a-1)}{(a-1-c)} \quad (n \rightarrow \infty)$$

と仮定を証明する ($\because c > 0, 0 < a < 1$)

以上から

$$b_n = \begin{cases} n & (a=1) \\ \left(\frac{1}{a}\right)^{n-1} & (0 < a < 1) \end{cases}$$

と仮定を証明する.

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{n-1} \quad \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

$$\frac{(1-a)x a^n}{(1-a^n)x + 1-a}$$

$$\frac{a^n x (a-1)}{(-x+a-1) + a^n x}$$

$$-(a^n-1)x + (a-1)$$

$$\lambda f''(\lambda) > f'(\lambda)$$

第 7 問

λ の関数 $f(\lambda)$ について、 $f(\lambda), f'(\lambda)$ が存在して次の条件を満たす。

(i) $f(0) > 0$, (ii) $f'(\lambda) > 0$, (iii) $[0, 1]$ で常に $f''(\lambda) > f'(\lambda)$

このとき $[0, 1]$ で常に $f(\lambda) > 0$ であることを示せ。

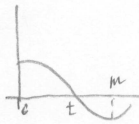
まず与条件から、 $f(\lambda)$ を下から評価してやる。(iii) を使いたくなくて、左辺に $f(\lambda)$ が表れる
ところ (もしくは $f'(\lambda) > 0$) 積分可能な平均値定理がある。 $M \leq f'(\lambda) \leq m$ かつ $m < 0$ の仮定が
このとき $0 \leq \lambda \leq m$ かつ $0 < \lambda < t$ で $f'(\lambda) > 0, f'(t) = 0$ なる t がある。

かつ $0 \leq \lambda \leq t$ のとき

$$f''(\lambda) > 0$$

$$f'(\lambda) - f'(0) > 0$$

$$f(\lambda) - f(0) > f'(0)\lambda$$



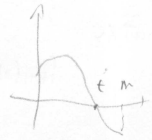
$\lambda = t$ として評価。

[軸最積分不等式]

- 積分、微分平均値の定理、部分積分。
- 背理法を活用し、 $M \leq f' \leq m$ かつ $f=0$ となる点。に注目
→ "ある点" で両辺に等しい式をつくる。

$$\frac{f'(\lambda) - f'(0)}{\lambda - 0} = f''(\lambda)$$

$$y = f'(\lambda) \quad \frac{f'(\lambda) - f'(0)}{\lambda} = f''(\lambda)$$



$$-f' > -3$$

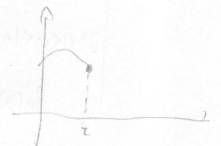
$$-f'' < -f$$

$$\lambda(f''(\lambda) - f'(\lambda)) > \lambda f'(\lambda) - m\lambda$$

$$\int_0^t \lambda(f''(\lambda) - f'(\lambda)) d\lambda > \int_0^t (\lambda f'(\lambda) - m\lambda) d\lambda$$

$$\lambda f'(\lambda) - f(\lambda) + f(0) \geq m\lambda$$

$$\lambda f'(\lambda)$$



$$m \leq f'(\lambda) \leq M$$

$$f'(\lambda) < f''(\lambda)$$

$$\int_0^t f'(\lambda) d\lambda > A$$

$$\int_0^t (f'(\lambda) - f(0)) d\lambda > A - c$$

$$f(t) - f(0) > 0$$

$$f'(\lambda) > \frac{f(t) - f(0)}{t}$$

$$f(t) > f(0) + \frac{f(t) - f(0)}{t} \cdot t$$

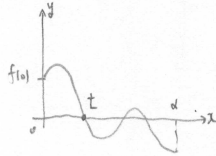
第 7 問

[解1] $f(0) = A > 0$. 又 $f(x)$ の $[0, 1]$ での最小値を与える $x = \alpha$ とする. (ii) から, $0 < \alpha \leq 1$... ①

である. さらに, $f(x) \leq 0$ と仮定する. この時 (i) から, $f(x)$ が連続であることから,

$f(1) = 0$. $0 < t \leq \alpha$, $0 < x < t$ で $f(x) > 0$ となる x が必ず存在する. したがって, (iii) から, $[0, t]$ の時,

$$f''(x) \geq 0$$



$[0, t]$ ($x \leq t$) で積分して

$$f'(x) - f'(0) \geq 0$$

... ②

もう一回積分して, $0 \leq x \leq t$ の時,

$$f(x) \geq f(0) \cdot x + f(0)$$

したがって, $x = t$ とすると

$$0 \geq f(0) \cdot t + f(0) > 0 \quad (\because (i) (ii), 0 \leq t)$$

と矛盾. よって, $m > 0$ だから題意は示された

[解2]

①より, $f(x) > f(0) > 0$ から, $f(x)$ は単調増加. から $f(0) > 0$ から $f(x) > 0$ とする. 矛盾. ②

$$\frac{1}{2} f(0) + f'(0) < 0$$

$$f'(0) < -\frac{1}{2} f(0)$$

$$f''(x) \geq m$$

$$f'(x) - f'(0) \geq mx$$

$$f(x) \geq mx + f(0)$$



第 8 問

4つの格子点 $O(0,0)$ $A(a,b)$ $B(a,b+1)$ $C(0,1)$ を考える。ただし、 a, b は正の整数で、
その最大公約数は1である。

- (1) $\square OABC$ の内部 (周も含む) にいくつ格子点があるか。
- (2) (1) の格子点全体を $P_1, P_2, \dots, P_t$ とするとき、 $\triangle OP_i A$ の面積の $\min$

第 8 問

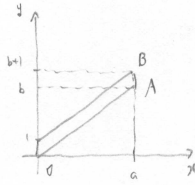
[解] $a \perp b$ かつ、 $\square OABC$ 上には (両端を含まず)

格点存在しない。又、 x を固定した時の OA, BC の

y 座標の差は 1 である。以上から、 $1 \leq x \leq a-1$ ($a \geq 2$)

なる $x \in \mathbb{Z}$ に對し、 $\square OABC$ には 1 つの格点がある。以下、

あわせて $a-1$ である。($a=1$ の時もこれより) したがって、 $a-1$ 個



(2) $OA: y = \frac{b}{a}x$ とおき、 $P_i(x_i, y_i)$ に對して、 $(\frac{b}{a}x_i < y_i < \frac{b}{a}x_i + 1)$ $H_i(x_i, \frac{b}{a}x_i)$ とする。

$$\triangle OAP_i = \frac{1}{2} \cdot a \cdot |y_i - \frac{b}{a}x_i| = \frac{1}{2} |ay_i - bx_i|$$

$a \perp b$ かつ、 $\triangle OAP_i > 0$ とおいて、 $|ay_i - bx_i| = |x_i|$ なる (x_i, y_i) が $\square$ の範囲にあるので、

$|ay_i - bx_i| \in \mathbb{N}$ とおいて、

$$\min \triangle OAP_i = \frac{1}{2}$$

$$\frac{b}{a}$$

$$|y_t - \frac{b}{a}x_t|$$

$$a \mid v$$

$$\frac{1}{a} |y_t - bx_t|$$

$$bx_t - ay_t = 0$$

$$|bx_t - ay_t|$$

第 9 問

2: 二次方程式 $ax^2 - bx + c = 0$ において、 a, b, c は 1 桁の自然数であり、2 解 α, β は $1 < \alpha < 2, 5 < \beta < 6$ を満たす。 a, b, c を求めよ。

第 9 問

[解] $\alpha + \beta = \frac{b}{a}$ である。 $1 < \alpha < 2$, $5 < \beta < 6$ から $6 < \alpha + \beta < 8$, $5 < \alpha\beta < 12$ である。
 $\alpha\beta = \frac{3c}{a}$

$$\begin{cases} 6 < \frac{b}{a} < 8 \\ 5 < \frac{3c}{a} < 12 \end{cases}$$

$a > 0$ ならば

$$\begin{cases} 6a < b < 8a \\ 5a < 3c < 12a \end{cases}$$

a, b, c は 179 の自然数だから $(a, b, c) = (1, 7, 2), (1, 7, 3)$ である。

1° $(a, b, c) = (1, 7, 2)$ のとき

$x^2 - 7x + 6 = 0$ の2解は $x = 1, 6$ である。不適。

2° $(a, b, c) = (1, 7, 3)$ のとき

$x^2 - 7x + 9 = 0$ のとき $x = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{2}$ である。 $1 < \frac{7 - \sqrt{13}}{2} < 2$, $5 < \frac{7 + \sqrt{13}}{2} < 6$ である。
 適する。

よって $(a, b, c) = (1, 7, 3)$ である。

$$\frac{5}{3} < c < 4$$

1°

$$3 - \sqrt{13} \sim 5$$